MaturEbook

Zbiór zadań CKE z podziałem na działy

Ambiters 2026

Spis treści

Od autorów **2**

Liczby **3**

Funkcja kwadratowa **7**

Funkcja wielomianowa **15**

Funkcja wymierna, wykładnicza i logarytmiczna **20**

Funkcje trygonometryczne **28**

Ciągi **36**

Wartość bezwzględna **50**

Geometria analityczna **64**

Optymalizacja **81**

Prawdopodobieństwo i kombinatoryka **108**

Dowodzenie **120**

Odpowiedzi do zadań **135**

Od autorów

W ebooku posegregowano działami zadania z matur roszerzonych z matematyki od CKE w latach 2015-2026, uwzględniając: majowe oraz czerwcowe terminy, arkusze pokazowe i diagnostyczne, *Informator* oraz *Zbiór zadań* dla formuły 2023. Niniejsza publikacja stanowi suplement do etapów IV z kursu *Z Podstawą Q Rozszerzeniu*, który sprawdza wiedzę zdobytą w poprzednich etapach.

Zadania, które nie obowiązują na maturze w **Formule 2015**:

Funkcja wymierna, wykładnicza i logarytmiczna zadania 13.-17.
Ciągi zadanie 32.
Optymalizacja zadania 41., 52.-53.
Prawdopodobieństwo i kombinatoryka zadania 27.-31., 33., 35., 37., 40., 43.
Dowodzenie zadania 39.-41., 46.

Zadania, które nie obowiązują na maturze w **Formule 2023**:

Funkcja trygonometryczna zadania 6.,8.
Wartość bezwzględna zadania 4., 9., 10., 12., 16., 17.
Geometria analityczna zadania 2., 10., 14., 17., 20.
Dowodzenie zadanie 21.

Autorzy

Liczby

Zadanie 1. (0-2) *CKE (grudzień 2014)*

Dane są liczby a, b takie, że $a - b = 4$ i $ab = 7$.

Oblicz $a^3b + ab^3$. Zakoduj w kratkach poniżej kolejno, od lewej do prawej, cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 2. (0-1) *CKE (maj 2015)*

Liczba $\left(3 - 2\sqrt{3}\right)^3$ jest równa

A. $27 - 24\sqrt{3}$ **B.** $27 - 30\sqrt{3}$ **C.** $135 - 78\sqrt{3}$ **D.** $135 - 30\sqrt{3}$

Zadanie 3. (0-1) *CKE (maj 2016)*

W rozwinięciu wyrażenia $\left(2\sqrt{3}x + 4y\right)^3$ współczynnik przy iloczynie xy^2 jest równy

A. $32\sqrt{3}$ **B.** 48 **C.** $96\sqrt{3}$ **D.** 144

Zadanie 4. (0-1) *CKE (maj 2017)*

Liczba $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2$ jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Zadanie 5. (0-1) *CKE (czerwiec 2017)*

Liczba $\log_4 25 + \log_2 10$ jest równa

A. $\log_2 15$ **B.** $\log_2 50$ **C.** $\log_2 210$ **D.** $\log_2 635$

Zadanie 6. (0-1) *CKE (maj 2018)*

Wartość wyrażenia $2\log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ wynosi

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Zadanie 7. (0-1) *CKE (maj 2018)*

Dane są liczby: $a = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c = \sqrt[4]{8}$, $d = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k = 2^{-\frac{1}{4}}$.

Prawdziwa jest równość

A. $k = a$ **B.** $k = b$ **C.** $k = c$ **D.** $k = d$

Zadanie 8. (0-1) *CKE (czerwiec 2018)*

Niech $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4$

Wtedy

A. $L = 1$ **B.** $L = 2$ **C.** $L = 3$ **D.** $L = 4$

Zadanie 9. (0-1) *CKE (czerwiec 2018)*

Liczba $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$ **jest równa**

A. 1 **B.** -1 **C.** $3 - 2\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2} + 1$

Zadanie 10. (0-1) *CKE (maj 2019)*

Dla dowolnych liczb $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$ **wartość wyrażenia** $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$

jest równa

A. $x \cdot y$ **B.** $\frac{1}{x \cdot y}$ **C.** -1 **D.** 1

Zadanie 11. (0-1) *CKE (czerwiec 2020)*

Po przekształceniu wyrażenia algebraicznego $(x\sqrt{2} + y\sqrt{3})^4$ **do postaci** $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ **współczynnik** c **jest równy**

A. 6 **B.** 36 **C.** $8\sqrt{6}$ **D.** $12\sqrt{6}$

Zadanie 12. (0-1) *CKE (lipiec 2020)*

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ jest równe

A. $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$ **B.** $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{6}$

Zadanie 13. (0-1) *CKE (marzec 2021)*

Liczba $\log_2 9$ jest równa

A. $\frac{1}{\log_3 4}$ **B.** $\log_3 4$ **C.** $\frac{1}{\log_3 \sqrt{2}}$ **D.** $\log_3 \sqrt{2}$

Zadanie 14. (0-1) *CKE (czerwiec 2021)*

Wartość wyrażenia $\left(\left(\sqrt{3}-1\right)^2-\left(\sqrt{3}+1\right)^2\right)^3$ jest równa

A. 512 **B.** 0 **C.** $-24\sqrt{3}$ **D.** $-192\sqrt{3}$

Zadanie 15. (0-1) *CKE (maj 2022)*

Liczba $\log_3\sqrt{27}-\log_{27}\sqrt{3}$ jest równa

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{11}{12}$ **D.** 3

Zadanie 16. (0-1) *CKE (czerwiec 2022)*

Wiadomo, że $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$.

Wtedy liczba $\log_{18}40$ jest równa

A. $\frac{3a+1}{a+b}$ **B.** $\frac{2a+1}{a+b}$ **C.** $\frac{2a+1}{a+2b}$ **D.** $\frac{3a+1}{2b+a}$

Zadanie 17. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Dane są liczby

$$a = \left(\log_{\sqrt{5}} 2\right) \cdot \log_2 25 \quad \text{i} \quad b = \frac{\log_5 6}{log_5 8}$$

Oblicz a^{b+1}. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-3) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$.

Wyraź $log_4 49$ za pomocą liczb a oraz b. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Oblicz wartość wyrażenia

$$log_8 3^{3\log_3 2 - \log_{27} 8 - \log_9 4}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-2) *CKE (grudzień 2022)*

Oblicz

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-2) *CKE (czerwiec 2023)*

Dane są liczby

$$a = 4^{log_2 45} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}$$

Oblicz $a - b$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-2) *CKE (czerwiec 2026)*

Dane są liczby rzeczywiste a oraz b

$$a = 16^{\frac{1}{2}\cdot \log_4 3\,6 - 2\cdot \log_4 3} \quad b = \log_2 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$$

Oblicz wartość ilorazu $\frac{a}{2b}$. Wynik zapisz w postaci 3^k, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zapisz obliczenia.

Funkcja kwadratowa

Zadanie 1. (0-2) *CKE (maj 2015)*

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f.

Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-5) *CKE (maj 2015)*

Dany jest trójmian kwadratowy

$$f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-6) *CKE (czerwiec 2015)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - (m-2)x + m - 5$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznacz całkowite wartości parametru m, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-6) *CKE (maj 2016)*

Dany jest trójmian kwadratowy

$$f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 3$ Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-5) *CKE (maj 2017)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2 - 6mx + (2m+3)(m-3) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, przy czym $x_1 < x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-2) *CKE (czerwiec 2017)*

Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ i $x_2 = 12$.

Oblicz największą wartość tej funkcji. Zakoduj kolejno, od lewej do prawej, cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (0-6) *CKE (czerwiec 2017)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty; 3)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-6) *CKE (maj 2018)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$, spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-6) *CKE (czerwiec 2018)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki:

$$x_1 \cdot x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad 0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-6) *CKE (czerwiec 2019)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2 + (2-4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie x_1, x_2, spełniające nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-4) *CKE (czerwiec 2020)*

Dane jest równanie kwadratowe

$$x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$$

z niewiadomą x.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla różne rozwiązania x_1, x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek

$$\mathbf{2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-5) *CKE (lipiec 2020)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność

$$\mathbf{(m^2 + 4m - 5)x^2 + 2x > 2mx - 2}$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-5) *CKE (marzec 2021)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie

$$\mathbf{x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0}$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-5) *CKE (maj 2021)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy

$$\mathbf{4x^2 - 2(m + 1)x + m}$$

ma dwa różne rozwiązania x_1 oraz x_2 spełniające warunki:

$$\mathbf{x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad oraz \quad x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-5) *CKE (maj 2022)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1 oraz x_2 spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem

$$f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$2x^2 - (2m+7)x + m^2 - 3m + 21 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek $x_1 = 2x_2$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-5) *CKE (grudzień 2022)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (m-4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 spełniające warunek:

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2 \cdot x_2 + 5x_1 \cdot x_2^2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-5) *CKE (maj 2023)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 > -28$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-5) *CKE (czerwiec 2023)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1 oraz x_2 spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-6) *CKE (maj 2024)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (3m+1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-6) *CKE (czerwiec 2024)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(3-m)\cdot x^2+(m+1)\cdot x-(m+1)^2=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2+x_2^2=x_1\cdot x_2+7$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-5) *CKE (grudzień 2024)*

Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

$$f(x)=x^2-3x-m^2+m+3$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|\leq 12$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-6) *CKE (maj 2025)*

Funkcja f określona jest wzorem

$$f(x)=(2-m)x^2-2(2m+1)x+m+8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x, gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1-x_2)^2\leq 180$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-4) *CKE (czerwiec 2025)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 26. (0-5) *CKE (maj 2026)*

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27. (0-5) *CKE (czerwiec 2026)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 + mx + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^4 + x_2^4 + 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 3$$

Zapisz obliczenia.

Funkcja wielomianowa

Zadanie 1. (0-1) *CKE (grudzień 2014)*

Wielomian $W(x) = 2x^3 - bx^2 - 1$ jest podzielny przez dwumian $(x + 1)$.

Wynika stąd, że

A. $b = -3$ **B.** $b = -1$ **C.** $b = 1$ **D.** $b = 3$

Zadanie 2. (0-1) *CKE (maj 2016)*

Wielomian $W(x) = 6x^3 + 3x^2 - 5x + p$ jest podzielny przez dwumian $(x - 1)$ dla p równego

A. 4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -4

Zadanie 3. (0-4) *CKE (maj 2016)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji f i g, określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-2) *CKE (maj 2017)*

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + ax + \frac{3}{4}$ przez dwumian $(x - 2)$ jest równa 1.

Oblicz wartość współczynnika a. W poniższe kratki wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 5. (0-6) *CKE (maj 2019)*

Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6.

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-1) *CKE (czerwiec 2019)*

Wiadomo, że wielomian $15x^5 - 133x^4 + 383x^3 - 499x^2 + 146x + 120$ ma w zbiorze $\left\{\frac{7}{6}; \frac{6}{5}; \frac{8}{7}; \frac{9}{5}\right\}$ dokładnie jeden pierwiastek wymierny.

Jest nim liczba

A. $\frac{6}{5}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{8}{7}$ **D.** $\frac{9}{5}$

Zadanie 7. (0-1) *CKE (czerwiec 2019)*

Parametr m dobrano tak, że każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania

$$(4 - m^2) \cdot x = m^2 - 3m + 2$$

z niewiadomą x.

Wynika stąd, że

A. $m = -2$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 4$

Zadanie 8. (0-1) *CKE (czerwiec 2020)*

Wielomian W określony wzorem $W(x) = x^{2019} - 3x^{2000} + 2x + 6$

A. jest podzielny przez $(x - 1)$ i z dzielenia przez $(x + 1)$ daje resztę równą 6.

B. jest podzielny przez $(x + 1)$ i z dzielenia przez $(x - 1)$ daje resztę równą 6.

C. jest podzielny przez $(x - 1)$ i jest podzielny przez $(x + 1)$.

D. jest podzielny przez $(x - 1)$, ani przez $(x + 1)$.

Zadanie 9. (0-1) *CKE (lipiec 2020)*

Wielomian $x^3 - x^2 - x - 2$ jest podzielny bez reszty przez wielomian

A. $x + 2$ **B.** $x + 1$ **C.** $x - 1$ **D.** $x - 2$

Zadanie 10. (0-4) *CKE (marzec 2021)*

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ przez dwumiany $(x - 2)$ i $(x - 3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18).

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - 4)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-1) *CKE (maj 2021)*

Wielomian $W(x) = x^4 + 81$ jest podzielny przez

A. $x - 3$ **B.** $x^2 + 9$ **C.** $x^2 - 3\sqrt{2}x + 9$ **D.** $x^2 + 3\sqrt{2}x - 9$

Zadanie 12. (0-2) *CKE (czerwiec 2021)*

Wynikiem dzielenia wielomianu $5x^3 - 7x^2 - 4x - 4$ przez dwumian $(x - 2)$ jest trójmian kwadratowy postaci $ax^2 + bx + c$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – wartości współczynników a, b oraz c.

Zadanie 13. (0-5) *CKE (czerwiec 2021)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x - 3)[x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m] = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-4) *CKE (maj 2022)*

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$ przez dwumian $(x + 2)$ jest równa (-30).

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-6) *CKE (czerwiec 2022)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

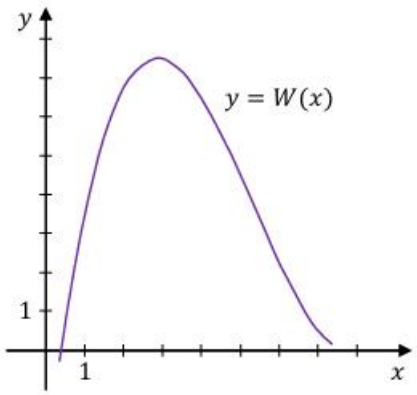
ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3, spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem



$$W(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + \frac{67}{8}x - 3$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Wielomian W jest określony wzorem

$$W(x) = (x - 1)(x^2 - mx + m - 1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-5) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Dane jest równanie

$$(x-6)[(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1]=0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku. Zapisz obliczenia.

Funkcja wymierna, wykładnicza i logarytmiczna

Zadanie 1. (0-1) *CKE (grudzień 2014)*

Funkcja f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = 3^{x-2} + 3$. Prosta l ma równanie $y = 3{,}3$

Ile punktów wspólnych mają wykres funkcji f i prosta l?

A. zero

B. jeden

C. dwa

D. nieskończenie wiele

Zadanie 2. (0-1) *CKE (czerwiec 2015)*

Liczba punktów wspólnych wykresów funkcji $y = -x + 1$ i $y = \log_2 x$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 3. (0-1) *CKE (czerwiec 2015)*

Zbiór K – to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{x(x^2-9)}$ jest liczbą rzeczywistą.

Zatem

A. $K = [-3; 0] \cup [3; +\infty)$

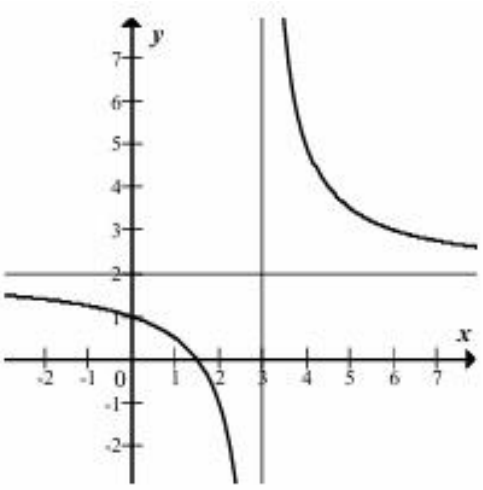
B. $K = (-3; 0) \cup (3; +\infty)$

C. $K = (-\infty; -3] \cup [0; 3]$

D. $K = (-\infty, -3) \cup (0,3)$

Zadanie 4. (0-1) *CKE (maj 2016)*

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji homograficznej $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $D = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.



Równanie $|f(x)| = p$ z niewiadomą x ma dokładnie jedno rozwiązanie

A. w dwóch przypadkach: $p = 0$ lub $p = 3$.

B. w dwóch przypadkach: $p = 0$ lub $p = 2$.

C. tylko wtedy, gdy $p = 3$.

D. tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Zadanie 5. (0-4) *CKE (czerwiec 2016)*

Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2x^2 + (k-1)x + 1 = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad k \neq 0$$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^m$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-2) *CKE (maj 2018)*

Punkt $A = (-5; 3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$.

Oblicz iloraz $\frac{d}{a}$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. (0-4) *CKE (lipiec 2020)*

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$, $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2 b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N)$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-3) *CKE (maj 2021)*

Rozwiąż nierówność

$$\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-3) *CKE (czerwiec 2022)*

Rozwiąż nierówność

$$\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{-3x+41}{x-13}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 13$. Punktem kratowym nazywamy punkt w kartezjańskim układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-5) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Rozwiąż nierówność

$$x + 4 + \frac{8}{x-4} \geq \frac{-2x-8}{x^2-16}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-5) *CKE (grudzień 2022)*

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-1}{x^2-4}-\frac{1}{2-x}\geq\frac{3}{2+x}+2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-2) *CKE (maj 2023)*

W chwili początkowej $(t=0)$ masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t\geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masa substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od 1,5 grama. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-2) *CKE (maj 2024)*

W chwili początkowej $(t = 0)$ filiżanka z gorącą kawą znajduje się w pokoju, a temperatura tej kawy jest równa $80°C$. Temperatura w pokoju (temperatura otoczenia) jest stała i równa $20°C$. Temperatura T tej kawy zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$T(t) = (T_p - T_z) \cdot k^{-t} + T_z \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

T - temperatura kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

t - czas wyrażony w minutach, liczony od chwili początkowej,

T_p - temperatura początkowa kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

T_z - temperatura otoczenia wyrażona w stopniach Celsjusza,

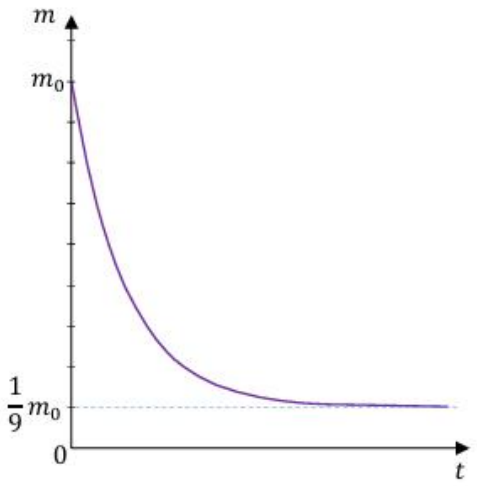
k - stała charakterystyczna dla danej cieczy.

Po 10 minutach, licząc od chwili początkowej, kawa ostygła do temperatury $65°C$.

Oblicz temperaturę tej kawy po następnych pięciu minutach. Wynik podaj w stopniach Celsjusza, w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-2) *CKE (czerwiec 2024)*

W chwili początkowej $(t = 0)$ zainicjowano pewną reakcję chemiczną, w której brał udział związek A**.** W wyniku tej reakcji masa m związku A zmieniała się w czasie zgodnie z zależnością



$$m(t) = a \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + b \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

m - masa związku A wyrażona w gramach,

t - czas w sekundach (liczony od chwili $t = 0$),

a, b - współczynniki liczbowe.

Masa początkowa związku A (tj. masa w chwili $t = 0$) była równa m_0 gramów. Po osiągnięciu stanu równowagi (tj. gdy $t \to +\infty$) masa tego związku była równa $\frac{1}{9}$ jego masy początkowej (zobacz rysunek).

Oblicz, po ilu sekundach (licząc od chwili zainicjowania tej reakcji) przereagowało 87,5% masy początkowej tego związku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-2) *CKE (grudzień 2024)*

Ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze można opisać zależnością

$$Q(t) = Q_0 \cdot \beta^{-t} \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

Q_0 - ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili początkowej ($t = 0$) wyrażony w milikulombach,

Q - ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili t (licząc od chwili początkowej) wyrażony w milikulombach

β - stała dodatnia,

t - czas wyrażony w sekundach,

Wiadomo, że w chwili $t = 4$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 2 milikulombów, a w chwili $t = 6$ s – ładunek 18 milikulombów.

Oblicz, ile milikulombów ładunku było zgromadzone w tym kondensatorze w chwili $t = 5$ s. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-2) *CKE (maj 2025)*

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

N_0 - liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,,

k - stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,,

t - czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

Funkcje trygonometryczne

Zadanie 1. (0-1) *CKE (grudzień 2014)*

Każda liczba x należąca do przedziału otwartego $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ spełnia nierówność

A. $\operatorname{tg} x > \sin x$ **B.** $\cos x > \sin x$ **C.** $\cos x > \operatorname{tg} x$ $\operatorname{tg} x > \cos x$

Zadanie 2. (0-3) *CKE (grudzień 2014)*

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie

$$\sin(5x) - \sin(x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-1) *CKE (maj 2015)*

Równanie $2\sin x + 3\cos x = 6$ w przedziale $(0; 2\pi)$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.

D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 4. (0-1) *CKE (czerwiec 2015)*

Dla dowolnego kąta α wartość wyrażenia $\sin\alpha + \sin(180^\circ - \alpha)$ jest równa wartości wyrażenia

A. $\sin 2\alpha$ **B.** $-\sin\alpha$ **C.** $2\sin\alpha$ **D.** 0

Zadanie 5. (0-4) *CKE (czerwiec 2015)*

Rozwiąż równanie

$$(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$$

dla $x \in (-\pi; 0)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-4) *CKE (maj 2016)*

Rozwiąż nierówność

$$\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\cos^2 x}<0$$

w przedziale $[0;2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-1) *CKE (czerwiec 2016)*

Wartość wyrażenia $\sin^2 75^\circ-\cos^2 75^\circ$ wynosi

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 8. (0-3) *CKE (czerwiec 2016)*

Rozwiąż nierówność

$$(2\sin x-3)(2\sin x+1)>0$$

w przedziale $(0;2\pi)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-4) *CKE (maj 2017)*

Rozwiąż równanie

$$\cos 2x+3\cos x=-2$$

w przedziale $[0;2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-4) *CKE (czerwiec 2017)*

Rozwiąż równanie

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

dla $x\in[0;2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-4) *CKE (maj 2018)*

Rozwiąż równanie

$$\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$$

w przedziale $[0; \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-1) *CKE (maj 2019)*

Wartość wyrażenia $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 13. (0-4) *CKE (maj 2019)*

Rozwiąż równanie

$$\cos x \cdot \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-4) *CKE (czerwiec 2019)*

Rozwiąż równanie

$$4\sin(7x)\cos(2x) = 2\sin(9x) - 1$$

w przedziale $[0; \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-4) *CKE (czerwiec 2020)*

Rozwiąż równanie

$$3\cos(2x) + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$$

dla $x \in [0; 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-4) *CKE (lipiec 2020)*

Rozwiąż równanie

$$4\sin^3 x + \sin(2x) = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-4) *CKE (marzec 2021)*

Rozwiąż równanie

$$\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\cdot\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-1) *CKE (maj 2021)*

Różnica $\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ$ jest równa

A. -1 **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 19. (0-5) *CKE (maj 2021)*

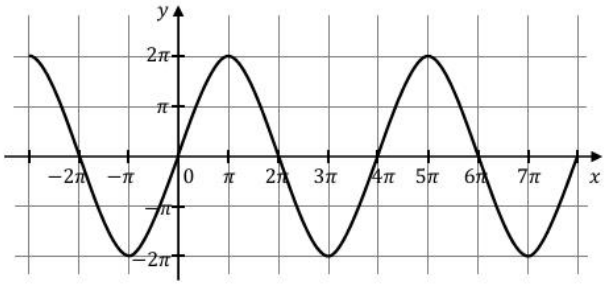
Rozwiąż równanie

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$

w przedziale $[0;\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-1) *CKE (czerwiec 2021)*

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x.



Jeden spośród podanych poniżej wzorów jest wzorem tej funkcji. Wskaż wzór funkcji f.

A. $f(x)=2\sin(2x)$

B. $f(x)=2\pi\cdot\sin(2x)$

C. $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

D. $f(x)=2\pi\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Zadanie 21. (0-4) *CKE (czerwiec 2021)*

Rozwiąż równanie

$$2\cos^2 x-\cos x=\sin(2x)-\sin x$$

w przedziale $[0;2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-1) *CKE (maj 2022)*

Jeżeli $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, to wartość wyrażenia $\sin\left(\beta - \frac{1}{3}\pi\right)$ jest równa

A. $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

Zadanie 23. (0-4) *CKE (maj 2022)*

Rozwiąż równanie

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$$

w przedziale $[0; \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-4) *CKE (czerwiec 2022)*

Rozwiąż równanie

$$\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$$

w przedziale $[0; \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Rozwiąż równanie

$$(3 - 2\cos x)^2 = 8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 8\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 12$$

w zbiorze $(0; \pi)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 26. (0-4) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Rozwiąż równanie

$$\sin(3x) = 2\sin x$$

w zbiorze $[0; \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27. (0-5) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

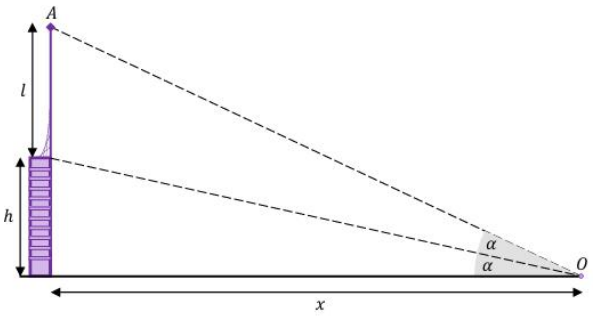
Rozwiąż równanie

$$\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Na szczycie wieży o wysokości h umieszczono pionowo antenę radiową stacji nadawczej o długości l $(l > h)$. Punkt O leży na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez podnóże wieży, a punkt A znajduje się na końcu anteny. Koniec anteny A widać z punktu O pod dwukrotnie większym kątem niż wieżę (zobacz rysunek).



Oblicz odległość x podnóża wieży od punktu O. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0-4) *CKE (grudzień 2022)*

Rozwiąż równanie

$$6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-3) *CKE (maj 2023)*

Rozwiąż równanie

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 31. (0-4) *CKE (czerwiec 2023)*

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 32. (0-5) *CKE (maj 2024)*

Rozwiąż równanie

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

w zbiorze $[0; 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0-4) *CKE (czerwiec 2024)*

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 34. (0-4) *CKE (grudzień 2024)*

Rozwiąż równanie

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 35. (0-5) *CKE (maj 2025)*

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 36. (0-4) *CKE (czerwiec 2025)*

Rozwiąż równanie

$$\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$$

w przedziale $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 37. (0-4) *CKE (maj 2026)*

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 38. (0-4) *CKE (czerwiec 2026)*

Rozwiąż równanie

$$\sin x + \sin(2x) - \cos x = \frac{1}{2}$$

Zapisz obliczenia.

Ciągi

Zadanie 1. (0-2) *CKE (grudzień 2014)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3) *CKE (grudzień 2014)*

Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$ dla $n \geq 1$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-2) *CKE (maj 2015)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1}-\frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right)$$

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (0-6) *CKE (maj 2015)*

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3.

Oblicz współczynniki a, b i c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-1) *CKE (czerwiec 2015)*

Ciąg (a_n)jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + n - 6$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = -1$.

Wyraz a_2 jest równy

A. -3 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 6. (0-1) *CKE (maj 2016)*

Granica $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(pn^2+4n)^3}{5n^6-4} = -\frac{8}{5}$.

Wynika stąd, że

A. $p = -8$ **B.** $p = 4$ **C.** $p = 2$ **D.** $p = -2$

Zadanie 7. (0-2) *CKE (maj 2016)*

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(\frac{1}{2x - 371}\right)^n$$

dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-1) *CKE (czerwiec 2016)*

Granica $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-7n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** $-\frac{7}{4}$ **C.** 0 **D.** $+\infty$

Zadanie 9. (0-2) *CKE (czerwiec 2016)*

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym iloraz jest równy pierwszemu wyrazowi, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12.

Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. (0-3) *CKE (czerwiec 2016)*

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$.

Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-1) *CKE (maj 2017)*

Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n = \frac{(n^2-10n)(2-3n)}{2n^3+n^2+3}$ dla $n \geq 1$.

Wtedy

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$ **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\frac{3}{2}$

Zadanie 12. (0-6) *CKE (maj 2017)*

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny.

Wyznacz liczby a, b, c. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-1) *CKE (czerwiec 2017)*

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$.

Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{3}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** 7

Zadanie 14. (0-5) *CKE (czerwiec 2017)*

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18.

Wyznacz te ciągi. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-4) *CKE (maj 2018)*

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-4) *CKE (czerwiec 2018)*

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny.

Oblicz wyraz aq tego ciągu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-4) *CKE (czerwiec 2018)*

Dany jest nieskończony ciąg okręgów o_n równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}.

Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k \geq 1$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-2) *CKE (maj 2019)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \frac{n^2}{3n^2 + 1}\right)$$

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 19. (0-6) *CKE (maj 2019)*

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny.

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-1) *CKE (czerwiec 2019)*

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony w następujący sposób: $a_1 = \frac{3}{5}$ oraz $a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n$ dla $n \geq 1$.

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

A. $\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{9}{10}$ **D.** $\frac{9}{5}$

Zadanie 21. (0-1) *CKE (czerwiec 2020)*

Ciąg a_n jest określony wzorem jest określony wzorem $a_n = \frac{3n^2+7n-5}{11-5n+5n^2}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Granica tego ciągu jest równa

A. 3 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $-\frac{5}{11}$

Zadanie 22. (0-5) *CKE (czerwiec 2020)*

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego.

Oblicz a_1. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-2) *CKE (lipiec 2020)*

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3.

Oblicz iloraz ciągu . W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

Zadanie 24. (0-3) *CKE (lipiec 2020)*

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. każdej liczby $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$.

Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-1) *CKE (marzec 2021)*

Liczba x jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Liczba y jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Wynika stąd, że liczba $x - y$ jest równa

A. 0 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ **D.** 3

Zadanie 26. (0-5) *CKE (marzec 2021)*

Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a + 100, b, c)$ jest geometryczny.

Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d). Zapisz obliczenia.

Zadanie 27. (0-2) *CKE (maj 2021)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2 - (1-2n)^2}{(2n-1)^2}$$

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 28. (0-1) *CKE (czerwiec 2021)*

Granice $\lim_{n\to+\infty} \frac{an^2+bn+4}{n+1}$ i $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{an^2+bn+4}$ są równe.

Stąd wynika, że

A. $a = 0$ i $b = 0$

B. $|a| = 1$ i $b = 0$

C. $|a| = 1$ i $|b| = 1$

D. $a = 0$ i $|b| = 1$

Zadanie 29. (0-2) *CKE (maj 2022)*

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem

$$a_n = \frac{(7p-1)n^3 + 5pn - 3}{(p+1)n^3 + n^2 + p}$$

gdzie p jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Oblicz wartość p, dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{4}{3}$. W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 30. (0-4) *CKE (maj 2022)*

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$. Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n). Ponadto $a_3 = b_4$.

Oblicz b_1. Zapisz obliczenia.

Zadanie 31. (0-4) *CKE (czerwiec 2022)*

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$. Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum, tj. $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$.

Oblicz q. Zapisz obliczenia.

Zadanie 32. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0-2) *CKE (Informator F2023)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 34. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)} \right)$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu (a_n) jest równa 12. Zapisz obliczenia.

Zadanie 35. (0-4) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{S - S_n}{S_n}\right| < 0,001$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

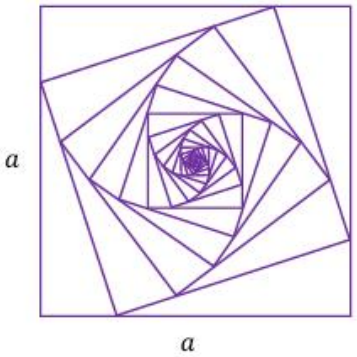
Zadanie 36. (0-5) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Ciąg $(a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_1)$ jest geometryczny i ma wyrazy różne od zera.

Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 37. (0-4) *CKE (maj 2023)*

Określamy kwadraty K_1, K_2, K_3, ... następująco:



- K_1 jest kwadratem o boku długości a,
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku 1:3,
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku 1:3,

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku 1:3,

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 38. (0-5) *CKE (czerwiec 2023)*

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Ciąg $(2a, 2b, c + 1)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto spełniony jest warunek $c - b = 6$.

Oblicz a, b oraz c. Zapisz obliczenia.

Zadanie 39. (0-4) *CKE (czerwiec 2023)*

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \dots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 40. (0-4) *CKE (maj 2024)*

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oblicz x, y oraz z. Zapisz obliczenia.

Zadanie 41. (0-4) *CKE (czerwiec 2024)*

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 16$$

Ponadto $a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2$.

Wyznacz wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 42. (0-5) *CKE (grudzień 2024)*

Trzeci i piąty wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, spełniają warunek $a_3 + a_5 = 10$. Trzywyrazowy ciąg $\left(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7\right)$ jest geometryczny.

Oblicz wyrazy tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 43. (0-4) *CKE (grudzień 2024)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n+1)}{\binom{n}{2}}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 44. (0-4) *CKE (maj 2025)*

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny. W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 45. (0-5) *CKE (czerwiec 2025)*

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$. Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 46. (0-2) *CKE (maj 2026)*

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3-4n+7}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 47. (0-4) *CKE (maj 2026)*

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025). Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 48. (0-4) *CKE (czerwiec 2026)*

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 14. Suma sześcianów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 392.

Wyznacz wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 49. (0-4) *CKE (czerwiec 2026)*

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny. Jeżeli w tym ciągu pomniejszymy trzeci wyraz o 4, a pozostałe wyrazy pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugi i trzeci wyraz tak otrzymanego ciągu arytmetycznego pomniejszymy o 1, to otrzymamy nowy ciąg geometryczny.

Oblicz x, y oraz z. Zapisz obliczenia.

Wartość bezwzględna

Zadanie 1. (0-1) *CKE (maj 2015)*

Na rysunku przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x - 8| \leq 10$.



Stąd wynika, że

A. $k = 2$ **B.** $k = 4$ **C.** $k = 5$ **D.** $k = 9$

Zadanie 2. (0-1) *CKE (maj 2015)*

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla} x \leq 0 \\ \big||x + 3| - 4\big| & \text{dla} x > 0 \end{cases}$.

Równanie $f(x) = 1$ ma dokładnie

A. jedno rozwiązanie.

B. dwa rozwiązania.

C. cztery rozwiązania.

D. pięć rozwiązań.

Zadanie 3. (0-2) *CKE (czerwiec 2015)*

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x| < |x - 1025|$. W poniższe kratki wpisz – kolejno – cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. (0-1) *CKE (czerwiec 2016)*

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \left|3 + 5^{3-x}\right| - 1$ dla każdej liczby rzeczywistej.

Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $(2; +\infty)$ **B.** $[1; 3]$ **C.** $[1; +\infty)$ **D.** $(0; +\infty)$

Zadanie 5. (0-4) *CKE (czerwiec 2016)*

Rozwiąż nierówność

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| \geq |x - 1|$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-1) *CKE (czerwiec 2017)*

Równanie $\left||x - 4| - 2\right| = 2$ ma dokładnie

A. dwa rozwiązania rzeczywiste.

B. jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. cztery rozwiązania rzeczywiste.

D. trzy rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 7. (0-1) *CKE (maj 2018)*

Równanie $\left||x| - 2\right| = |x| + 2$

A. nie ma rozwiązań.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania.

D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

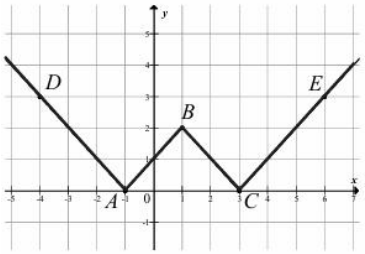
Zadanie 8. (0-1) *CKE (czerwiec 2018)*

Spośród poniższych nierówności wskaż tę, którą spełniają dokładnie trzy liczby całkowite.

A. $\left|\frac{3}{4}x + 5\right| < 2$ **B.** $\left|\frac{4}{3}x + 5\right| < 2$ **C.** $\left|\frac{3}{5}x + 4\right| < 2$ **D.** $\left|\frac{4}{5}x + 3\right| < 2$

Zadanie 9. (0-1) *CKE (maj 2019)*

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AD i CE oraz dwóch odcinków AB i BC, gdzie $A = (-1,0)$, $B = (1,2)$, $C = (3,0)$, $D = (-4,3)$, $E = (6,3)$.



Wzór funkcji f to

A. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

B. $f(x) = \big||x - 1| - 2\big|$.

C. $f(x) = \big||x - 1| + 2\big|$.

D. $f(x) = |x - 1| + 2$.

Zadanie 10. (0-3) *CKE (czerwiec 2020)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie

$$|x - 5| = (a - 1)^2 - 4$$

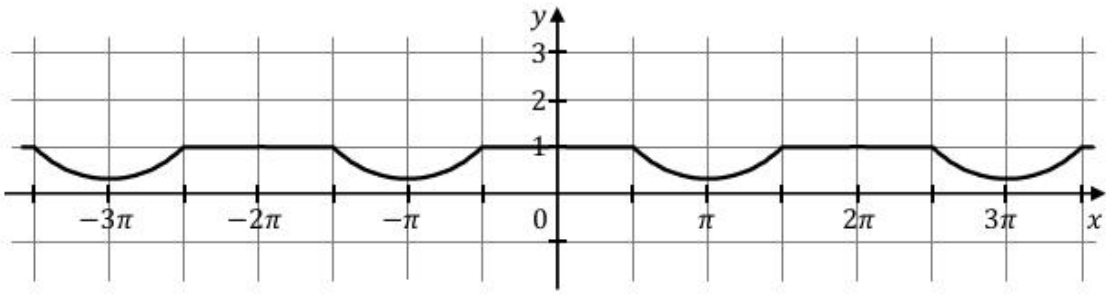
ma dwa różne rozwiązania dodatnie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-1) *CKE (maj 2021)*

Liczba różnych pierwiastków równania $3x + |x - 4| = 0$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 12. (0-1) *CKE (maj 2021)*



Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x.

Jeden spośród podanych poniżej wzorów jest wzorem tej funkcji. Wskaż wzór funkcji f.

A. $\frac{\cos x+1}{|\cos x|+1}$ **B.** $\frac{\sin x+1}{|\sin x|+1}$ **C.** $\frac{|\cos x|-2}{\cos x-2}$ **D.** $\frac{|\sin x|-2}{\sin x-2}$

Zadanie 13. (0-3) *CKE (maj 2022)*

Rozwiąż równanie

$$|x-3| = 2x+11$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-6) *CKE (Informator F2023)*

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx+y=m^2 \\ 4x+my=8 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x,y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x+y|<2$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Rozwiąż nierówność

$$2x^2 + x|2x - 1| \leq 3$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{3 - x}$$

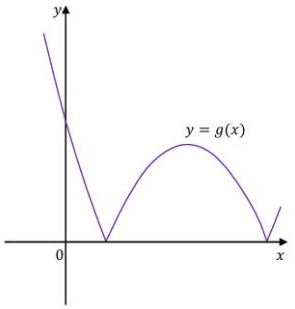
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-4) *CKE (grudzień 2022)*

Funkcja g jest określona wzorem

$$g(x) = \left|-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5\right|$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 17.1. (0-2) *CKE (grudzień 2022)*

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $[9, 11]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17.2. (0-2) *CKE (grudzień 2022)*

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-4) *CKE (maj 2023)*

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-4) *CKE (grudzień 2024)*

Rozwiąż równanie

$$|4x-8| + |x-2| = |2-x| + |x+2| + 4$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-4) *CKE (maj 2025)*

Rozwiąż nierówność

$$|x-2| - 2 \cdot |x+3| < -2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-4) *CKE (maj 2026)*

Rozwiąż nierówność

$$|2x-6| - |x^2-9| < 0$$

Zapisz obliczenia.

Planimetria

Zadanie 1. (0-2) *CKE (grudzień 2014)*

Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5.

Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-4) *CKE (maj 2015)*

Długości boków czworokąta ABCD są równe: $|AB| = 2, |BC| = 3, |CD| = 4, |DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg..

Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

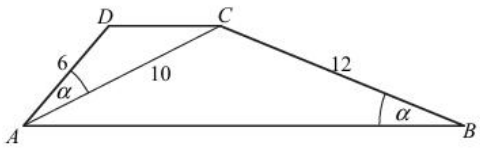
Zadanie 3. (0-4) *CKE (czerwiec 2015)*

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg.

Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-1) *CKE (czerwiec 2016)*

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są: $|AD| = 6, |BC| = 12$, $|AC| = 10$ oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD|$ (zobacz rysunek).



Wówczas długość podstawy AB tego trapezu jest równa

A. $|AB| = 18$ **B.** $|AB| = 20$ **C.** $|AB| = 22$ **D.** $|AB| = 24$

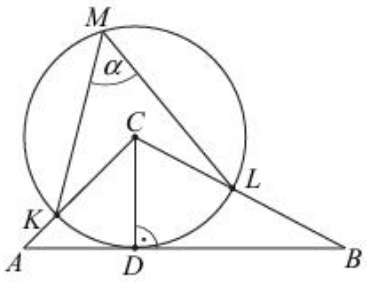
Zadanie 5. (0-4) *CKE (czerwiec 2016)*

W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$.

Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-1) *CKE (maj 2017)*

Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC, w którym $|AD| = |CD| = \frac{1}{2}|BC|$ (zobacz rysunek). Okrąg o środku C i promieniu CD jest styczny do prostej AB. Okrąg ten przecina boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach K i L.



Zaznaczony na rysunku kąt α wpisany w okrąg jest równy

A. $37,5°$ **B.** $45°$ **C.** $52,5°$ **D.** $60°$

Zadanie 7. (0-6) *CKE (czerwiec 2017)*

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P.

Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-5) *CKE (czerwiec 2018)*

Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD.

Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-4) *CKE (maj 2019)*

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16$, $|AD| = 6$, $|CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$.

Oblicz obwód trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-4) *CKE (czerwiec 2019)*

Miara kąta wewnętrznego n-kąta foremnego jest o $2°$ mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+2)$-kąta foremnego.

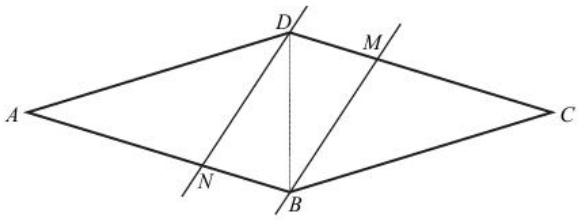
Oblicz n. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-2) *CKE (czerwiec 2020)*

W trójkącie ABC bok AB jest 3 razy dłuższy od boku AC, a długość boku BC stanowi $\frac{4}{5}$ długości boku AB.

Oblicz cosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC. W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 12. (0-6)



Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B i D poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki CD i AB – odpowiednio – w punktach M i N, tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury AND, $NBMD$, BCM o równych polach. Ponadto wiadomo, że $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek).

Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-4) *CKE (marzec 2021)*

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC czworokąta $ABCD$ są ostre, a iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$.

Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-4) *CKE (maj 2021)*

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest pięć razy krótszy od przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oblicz sinus tego z kątów ostrych trójkąta ABC, który ma większą miarę. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-5) *CKE (czerwiec 2021)*

Na okręgu jest opisany czworokąt $ABCD$. Bok AD tego czworokąta jest dwa razy dłuższy od boku AB, a przekątna BD ma długość równą 6. Ponadto spełnione są następujące warunki:

$$\cos(\sphericalangle ADB) = \frac{7}{8}, \quad |\sphericalangle BCD| = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad |AB| > \sqrt{15}$$

Oblicz długość boku BC tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-1) *CKE (czerwiec 2022)*

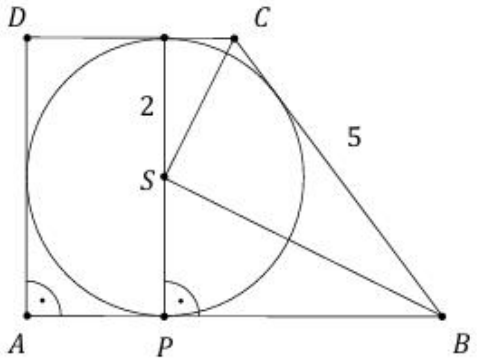
Pole trójkąta ostrokątnego o bokach 5 i 8 jest równe 12.

Długość trzeciego boku tego trójkąta jest równa

A. 5 **B.** 8 **C.** $\sqrt{41}$ **D.** $\sqrt{143}$

Zadanie 17. (0-5) *CKE (Informator F2023)*

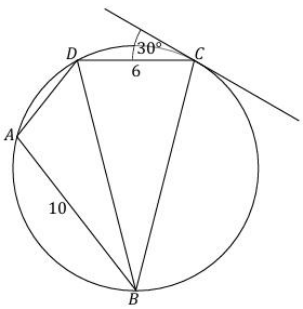
Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności tego okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa. Zapisz obliczenia.

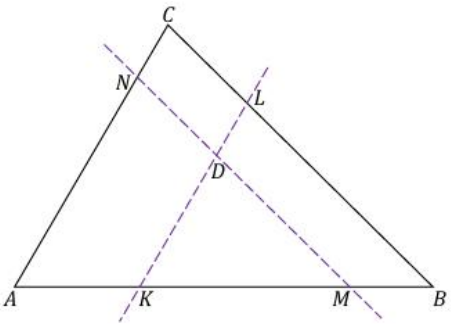
Zadanie 18. (0-6) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

W pewien okrąg wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = 10$, $|CD| = 6$ oraz $|BC| = |BD|$. Styczna do tego okręgu w punkcie C tworzy z bokiem CD kąt α o mierze 30° (zobacz rysunek).



Oblicz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-6) *CKE (Zbiór zadań F2023)*



Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku AC przecina bok AB w punkcie K, a bok BC w punkcie L. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie M, a bok AC w punkcie N (zobacz rysunek). Stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta KBL jest równy 5:7, a stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta AMN jest równy 5:8. Pole czworokąta $DLCN$ jest równe 15.

Oblicz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

W trapezie $ABCD$ przekątna BD jest dwusieczną kąta CBA i przecina przekątną AC w punkcie K, takim, że $|CK| : |KA| = 1:3$. Pole tego trapezu jest równe $100\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $\sin\sphericalangle BAD = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $|AD| = 10$ oraz kąt BAD jest ostry.

Oblicz długości pozostałych boków trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC|$, jest wpisany w okrąg o promieniu R. Środek tego okręgu leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB.

Wykaż, że pole trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Określ dziedzinę tej funkcji. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-5) *CKE (grudzień 2022)*

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $|AB| > |CD|$ oraz ramię BC ma długość 6. Na tym trapezie opisano okrąg o promieniu $R = 5$. Miary kątów BAC i ABC tego trapezu spełniają warunek

$$\frac{\sin|\sphericalangle BAC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = \frac{5}{8}$$

Oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

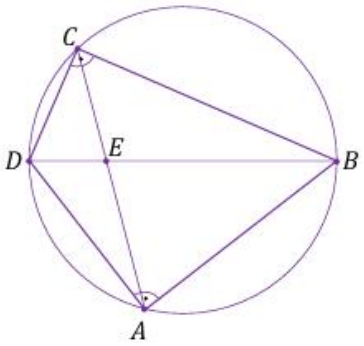
Zadanie 23. (0-4) *CKE (maj 2023)*

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-5) *CKE (czerwiec 2023)*

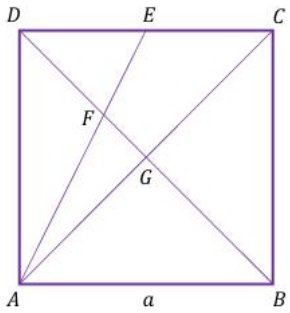
Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysunek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E tak, że $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.



Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-4) *CKE (maj 2024)*

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości a. Punkt E jest środkiem boku CD. Przekątna BD dzieli trójkąt ACE na dwie figury: AGF oraz $CEFG$ (zobacz rysunek).



Oblicz pola figur AGF oraz $CEFG$. Zapisz obliczenia.

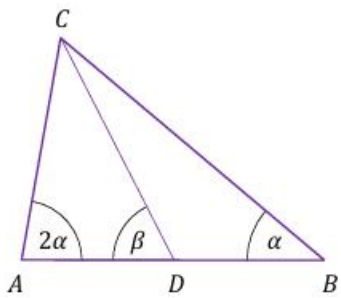
Zadanie 26. (0-4) *CKE (czerwiec 2024)*

W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt ABC. Długość boku AB jest równa 6. Bok BC ma długość $4\sqrt{3}$ i jest najdłuższym bokiem tego trójkąta.

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27. (0-5) *CKE (grudzień 2024)*

W trójkącie ostrokątnym ABC miara kąta BAC jest dwa razy większa od miary kąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AB. Niech α oznacza miarę kąta ABC, natomiast β – miarę kąta ADC (zobacz rysunek).



Oblicz $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0-3) *CKE (maj 2025)*

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC. Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Oblicz miarę kąta DAC. Zapisz obliczenia.

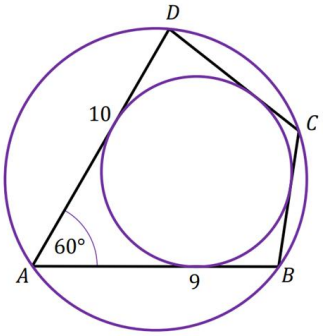
Zadanie 29. (0-4) *CKE (czerwiec 2025)*

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ o bokach długości: $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$ oraz $|DA| = 8$, opisano okrąg.

Oblicz promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0-5) *CKE (maj 2026)*

W czworokącie $ABCD$ są dane: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 60°$. W ten czworokąt wpisano okrąg oraz na tym czworokącie opisano okrąg (zobacz rysunek).



Oblicz długości boków BC i CD <u>oraz</u> pole czworokąta ABCD. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-4) *CKE (czerwiec 2026)*

Pole czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg jest równe 18. Boki AB i BC są prostopadłe, a ponadto $|AB| = 4$ oraz $|BC| = 7$.

Oblicz obwód tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

Geometria analityczna

Zadanie 1. (0-1) *CKE (grudzień 2014)*

Okrąg o równaniu $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ ma dwa punkty wspólne z prostą o równaniu

A. $x=0$ **B.** $y=0$ **C.** $y=-x$ **D.** $y=x$

Zadanie 2. (0-6) *CKE (grudzień 2014)*

Dany jest okrąg o_0 o równaniu $(x-3)^2+(y-1)^2=1$. W pierwszej „ćwiartce" układu współrzędnych istnieją dwa okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie do okręgu o_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych.

Oblicz odległość środków okręgów o_1 oraz o_2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-1) *CKE (maj 2015)*

Odległość początku układu współrzędnych od prostej o równaniu $y=2x+4$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** 4

Zadanie 4. (0-2) *CKE (czerwiec 2015)*

Prosta o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S=(1,-4)$.

Wyznacz promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-5) *CKE (maj 2016)*

Punkty $A=(30,32)$ i $B=(0,8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x-y+2=0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC.

Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-5) *CKE (czerwiec 2016)*

Punkty $A = (-7, -2)$ i $B = (4, -7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC, a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$.

Oblicz współrzędne wierzchołka C. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-5) *CKE (maj 2017)*

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-1) *CKE (maj 2017)*

Dane są punkt $B = (-4,7)$ i $\vec{u} = [-3,5]$.

Punkt A, taki, $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$ ma współrzędne

A. $A = (5, -8)$ **B.** $A = (-13,22)$ **C.** $A = (9, -15)$ **D.** $A = (12,24)$

Zadanie 9. (0-5) *CKE (czerwiec 2017)*

Prosta l, na której leży punkt $P = (8,2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36.

Wyznacz równanie prostej l. Zapisz obliczenia

Zadanie 10. (0-1) *CKE (czerwiec 2017)*

Punkt $P' = (3, -3)$ jest obrazem punktu $P = (1,3)$ w jednokładności o środku w punkcie $S = (-2,12)$.

Skala tej jednokładności jest równa

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 11. (0-6) *CKE (maj 2018)*

Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$.

Oblicz współrzędne wierzchołków *B* i *C* tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-1) *CKE (czerwiec 2018)*

Okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 625$ jest styczny do okręgu o środku $S = (12,5)$ i promieniu r.

Wynika stąd, że

A. $r = 5$ **B.** $r = 15$ **C.** $r = 10$ **D.** $r = 20$

Zadanie 13. (0-5) *CKE (czerwiec 2018)*

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i CA w punktach – odpowiednio – $P = (0,10)$, $Q = (8,6)$ i $R = (9,13)$.

Oblicz współrzędne wierzchołków *A*, *B* i *C* tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-6) *CKE (maj 2019)*

Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru *a*, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-6) *CKE (czerwiec 2019)*

Punkt $A = (-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$.

Wyznacz długość boku tego rombu. Zapisz obliczenia

Zadanie 16. (0-1) *CKE (czerwiec 2019)*

Dane są trzy niewspółliniowe punkty: $A = (1,1)$, $B = (6,3)$, $C = (4,5)$.

Ile jest wszystkich punktów D takich, że czworokąt o wierzchołkach w punktach A, B, C, D jest równoległobokiem?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 17. (0-5) *CKE (czerwiec 2020)*

Prosta o równaniu $x + y - 10 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ w punktach K i L. Punkt S jest środkiem cięciwy KL.

Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-6) *CKE (lipiec 2020)*

Punkt $A = (-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 82,5. Przekątna BD tego rombu zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$.

Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-5) *CKE (marzec 2021)*

Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$ i $b \neq 0$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1. Zapisz obliczenia.

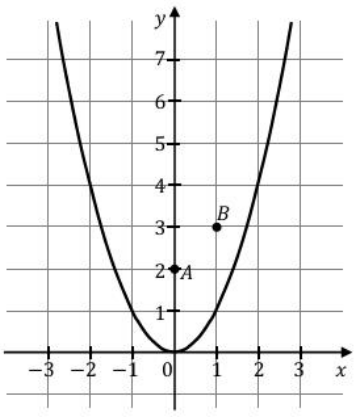
Zadanie 20. (0-4) *CKE (maj 2021)*

Prosta przechodząca przez punkty $A = (8, -6)$ i $B = (5,15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (0,0)$.

Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB. Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-6) *CKE (maj 2021)*

Dane są parabola o równaniu $y = x^2$ oraz punkty $A = (0,2)$ i $A = (1,3)$ (zobacz rysunek). Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołek C leży na tej paraboli. Niech m oznacza pierwszą współrzędną punktu C.



Wyznacz pole P trójkąta ABC jako funkcję zmiennej m. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których trójkąt ABC jest ostrokątny. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-1) *CKE (czerwiec 2021)*

Wektory $\vec{a} = [m - 2; m + 2]$ oraz $\vec{b} = \left[m^{1,5}; 2^{1,5}\right]$ mają równe długości wtedy i tylko wtedy, gdy

A. $m = 0$ lub $m = 4$

B. $m = 0$ lub $m = 2$

C. $m = 2$

D. $m = 2$ lub $m = 4$

Zadanie 23. (0-4) *CKE (czerwiec 2021)*

Dane są prosta k o równaniu $x - 2y = 0$ i prosta l o równaniu $2x + y - 1 = 0$. Punkt P leży na prostej o równaniu $y = x + 4$. Odległość punktu P od prostej k jest dwa razy większa niż odległość punktu P od prostej l.

Oblicz współrzędne punktu P. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-6) *CKE (maj 2022)*

Punkt $A = (-3,2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC zawarty jest w prostej o równaniu $y = x - 1$.

Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-6) *CKE (czerwiec 2022)*

Dane są okrąg o_1 o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=98$ oraz okrąg o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$. Środki okręgów o_1 i o_2 leżą po różnych stronach prostej k o równaniu $y=-3x-6$, a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej k.

Wyznacz równanie okręgu o_2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 26. (0-1) *CKE (czerwiec 2022)*

Sumą wektorów $\vec{a}=\left[2+2m;\frac{2}{3}n+1\right]$ oraz $\vec{b}=[n+1;m+2]$ jest wektor $\vec{c}=[0;0]$

Wynika stąd, że

A. $m=1$ i $n=3$

B. $m=-9$ i $n=-21$

C. $m=3$ i $n=-9$

D. $m=-1$ i $n=0$

Zadanie 27. (0-5) *CKE (Informator F2023)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) proste o równaniach $2x+y-4m-4=0$ oraz $x-3y+5m+5=0$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych (x_P,y_P).

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

$$x_P>0,\quad y_P>0,\quad y_P\geq x_P^2 \quad \text{oraz} \quad 2<-\frac{8}{y_P^2}+\frac{8}{x_P}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD}=[-21,-7]$ i $\overrightarrow{DC}=[15,8]$.

Oblicz pole tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie $S = (19, -11)$ i promieniu $17\sqrt{2}$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

Oblicz sinus kąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-6) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $A = (9,12)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Prosta k o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta ABC tego trójkąta. Okrąg O o równaniu $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt.

Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki B i C tego trójkąta z okręgiem O. Zapisz obliczenia

Zadanie 31. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 24 \\ x^2 - 10x + y^2 - 8y + 40 = 0 \end{cases}$$

Zapisz obliczenia.

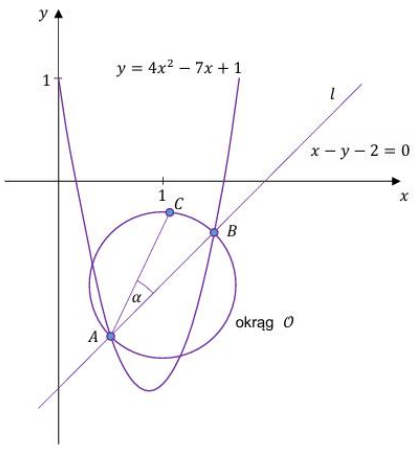
Zadanie 32. (0-2) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są dwie proste l_1 oraz l_2. Kąt między tymi prostymi ma miarę $45°$. Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_1 jest równy $\frac{2}{3}$.

Oblicz współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0-6) *CKE (maj 2023)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B. Odcinek AB jest średnicą okręgu O. Punkt C leży na okręgu O nad prostą l, a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $tg\ \alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



Oblicz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

Zadanie 34. (0-4)

W okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ wpisano trójkąt ABC. Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $4x - 3y + 2 = 0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD| = 4 \cdot |DB|$.

Oblicz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 35. (0-5) *CKE (maj 2024)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1,2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C. Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

Oblicz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 36. (0-6) *CKE (czerwiec 2024)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $3x + y + 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ w punktach A oraz B, które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 37. (0-4) *CKE (grudzień 2024)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są: okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 50$ i punkty $A = (6,4)$ oraz $B = (-6,8)$. Punkt C leży na tym okręgu i $|AC| = |BC|$.

Oblicz współrzędne punktu C. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 38. (0-5) *CKE (maj 2025)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi O_1 oraz O_2 o równaniach:

- O_1: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- O_2: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B. Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

Oblicz współrzędne punktów A, B oraz M. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 39. (0-6) *CKE (czerwiec 2025)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-8, -1)$ i $D = (-13,9)$ oraz środku symetrii $M = \left(-\frac{9}{2}, 1\right)$. Okrąg O przechodzi przez początek tego układu i jest styczny do prostych zawierających boki AB i BC tego równoległoboku. Druga współrzędna środka okręgu O jest liczbą ujemną.

Wyznacz równanie okręgu O. Zapisz obliczenia.

Zadanie 40. (0-6) *CKE (maj 2026)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (1, -1)$ oraz $B = (4,0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, w którym $|CA| = |CB|$. Jedno z ramion trójkąta ABC zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AC tego trójkąta obrano taki punkt M, że $|AM| : |MC| = 1 : 4$.

Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie M i przechodzi przez punkt C. Zapisz obliczenia.

Stereometria

Zadanie 1. (0-5) *CKE (maj 2015)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy.

Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-5) *CKE (czerwiec 2015)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze $30°$. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$.

Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-6) *CKE (maj 2016)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-1) *CKE (czerwiec 2016)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość.

Wynika stąd, że cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

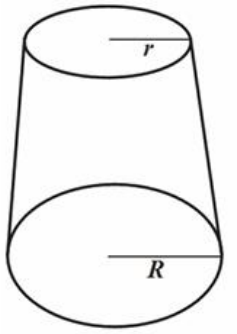
Zadanie 5. (0-4) *CKE (maj 2017)*

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty.

Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-4) *CKE (maj 2018)*

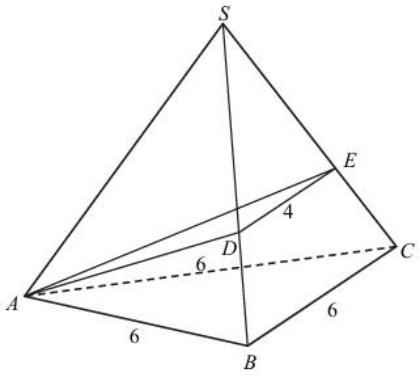
Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw $(r < R)$, a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π, a $r = 6$.



Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-6) *CKE (czerwiec 2019)*

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E, takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

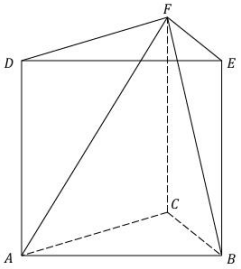
Zadanie 8. (0-6) *CKE (czerwiec 2020)*

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa 30°. Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α, taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{2}$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-4) *CKE (marzec 2021)*

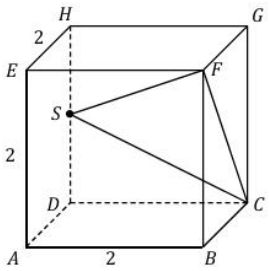
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek).



Oblicz sinus kąta AFB. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-4) *CKE (czerwiec 2021)*

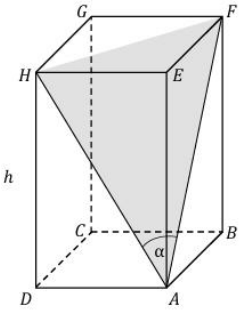
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt S jest środkiem krawędzi DH (zobacz rysunek).



Oblicz miarę najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta CFS. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-5) *CKE (maj 2022)*

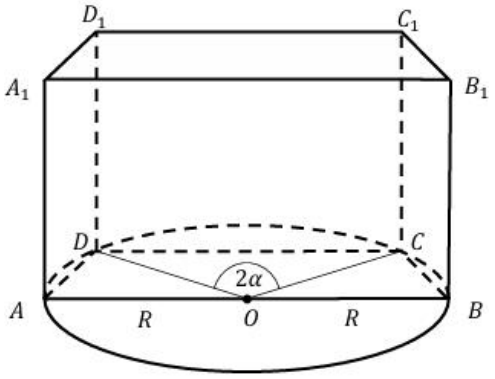
Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4



Oblicz wysokość h tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-5) *CKE (czerwiec 2022)*

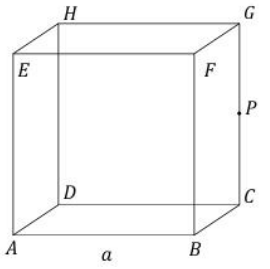
Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest trapez równoramienny $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Dłuższa podstawa AB trapezu jest średnicą tego okręgu, a krótsza – cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu o mierze 2α (zobacz rysunek). Przekątna ściany bocznej zawierającej ramię trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α.



Wyznacz objętość tego graniastosłupa jako funkcję promienia R i miary kąta α. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



$|PG| = |PC|$

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-5) *CKE (Informator F2023)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy 1:5. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę.

Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do 1°). Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-6) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α. Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Oblicz współczynnik k. Zapisz obliczenia.

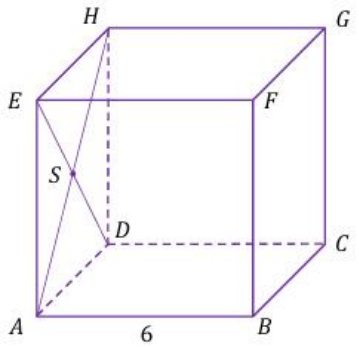
Zadanie 16. (0-5) *CKE (grudzień 2022)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Przez krawędź BC podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę π prostopadłą do ściany bocznej SAD.

Sporządź rysunek tego ostrosłupa, zaznacz na rysunku przekrój wyznaczony przez płaszczyznę π i nazwij figurę, która jest tym przekrojem. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-4) *CKE (maj 2023)*

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-4) (

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa a. Sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka graniastosłupa jest równy $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-3) *CKE (grudzień 2024)*

Iloczyn długości średnicy podstawy walca i wysokości walca jest równy $12\sqrt{3}$. Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $12\pi(\sqrt{3}+1)$.

Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-5) *CKE (maj 2025)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-5) *CKE (czerwiec 2025)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie ABC. Płaszczyzna zawierająca krawędź AB podstawy i prostopadła do krawędzi bocznej CD przecina tę krawędź w punkcie E, przy czym $\frac{|CE|}{|DE|}=\frac{3}{11}$.

Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa do pola podstawy ABC. Zapisz obliczenia.

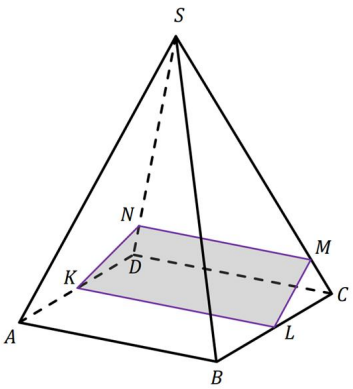
Zadanie 22. (0-4) *CKE (maj 2026)*

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym. Długość okręgu opisanego na podstawie ABC jest równa $6\sqrt{2}\pi$, a cosinus kąta między krawędziami bocznymi SB i SC jest równy $\frac{5}{9}$.

Oblicz długość krawędzi podstawy ABC oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi SAC i SBC tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-4) *CKE (maj 2026)*

Ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ ma objętość równą $36\sqrt{3}$. Ten ostrosłup przecięto płaszczyzną γ, która:



- jest prostopadła do ściany bocznej CDS ostrosłupa,
- przechodzi przez środek K krawędzi AD oraz środek L krawędzi BC,
- przecina krawędź boczną CS w punkcie M oraz krawędź boczną DS w punkcie N,
- tworzy z płaszczyzną podstawy $ABCD$ kąt o mierze 30°.

Przekrój $KLMN$ wyznaczony przez płaszczyznę γ jest trapezem równoramiennym.

Oblicz pole trapezu $KLMN$. Zapisz obliczenia.

Optymalizacja

Zadanie 1. (0-2) *CKE (grudzień 2014)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$.

Oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x = 12$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-1) *CKE (grudzień 2014)*

Funkcja określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = x^5 + 5x - 1$

A. ma więcej niż dwa minima lokalne.

B. ma dokładnie dwa minima lokalne.

C. ma dokładnie jedno minimum lokalne.

D. nie ma minimum lokalnego.

Zadanie 3. (0-3) *CKE (grudzień 2014)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^4$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f, która jest równoległa do prostej $y = 4x + 7$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-7) *CKE (grudzień 2014)*

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm.

Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-4) *CKE (maj 2015)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-7) *CKE (maj 2015)*

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20.

Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-1) *CKE (czerwiec 2015)*

Która z poniższych funkcji, określonych w zbiorze liczb rzeczywistych, nie ma minimum lokalnego ani maksimum lokalnego?

A. $f(x) = 4x^2 + 5x$

B. $f(x) = 3x^3 + 2x^2$

C. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

D. $f(x) = (4x + 1)^2$

Zadanie 8. (0-7) *CKE (czerwiec 2015)*

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2.

Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-1) *CKE (maj 2016)*

Funkcja $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x.

Pochodna tej funkcji jest określona wzorem

A. $f'(x) = \frac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$

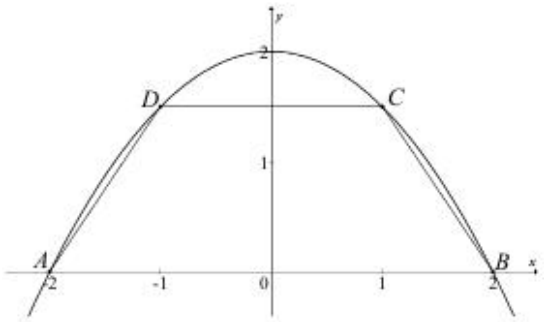
B. $f'(x) = \frac{-9x^2+2x-12}{(x^2+4)^2}$

C. $f'(x) = \frac{3x^2-2x-12}{(x^2+4)^2}$

D. $f'(x) = \frac{9x^2-2x+12}{(x^2+4)^2}$

Zadanie 10. (0-7) *CKE (maj 2016)*

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2,0)$ i $B = (2,0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-7) *CKE (czerwiec 2016)*

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π.

Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-3) *CKE (maj 2017)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (1, 0)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-7) *CKE (maj 2017)*

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P.

Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1) *CKE (czerwiec 2017)*

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{2x-8}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$.

Wówczas pochodna tej funkcji dla argumentu $x = \sqrt{2} + 4$ jest równa

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ **C.** -1 **D.** $2\sqrt{2}$

Zadanie 15. (0-7) *CKE (czerwiec 2017)*

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28.

Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0-1) *CKE (maj 2018)*

Granica $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-x+2}{x^2-5x+6}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** -1 **C.** 0 **D.** $+\infty$

Zadanie 17. (0-3) *CKE (maj 2018)*

Styczna do paraboli o równaniu $y=\sqrt{3}x^2-1$ w punkcie $P=(x_0,y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem 30°.

Oblicz współrzędne punktu P. Zapisz obliczenia.

Zadanie 18. (0-7) *CKE (maj 2018)*

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach. Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem

$$L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$$

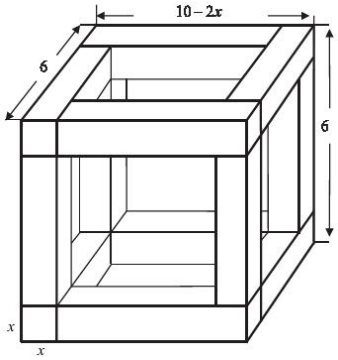
Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-2) *CKE (czerwiec 2018)*

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A=\left(6,\frac{36}{5}\right)$ tego wykresu. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 20. (0-7) *CKE (czerwiec 2018)*

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę funkcji V. Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 21. (0-2) *CKE (maj 2019)*

Punkt $P = (10{,}2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P.

Oblicz współczynnik b. Zapisz obliczenia

Zadanie 22. (0-7) *CKE (maj 2019)*

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$.

Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-2) *CKE (czerwiec 2019)*

Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \frac{25x^2 - 9}{x^2 + 2}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0-7) *CKE (czerwiec 2019)*

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

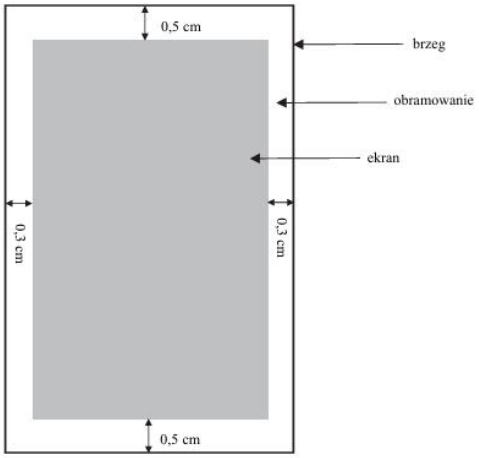
- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-7) *CKE (czerwiec 2020)*

Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60 cm^2.



Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza. Zapisz obliczenia.

Zadanie 26. (0-1) *CKE (lipiec 2020)*

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{3x+1}{x^2+1}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Pochodna f' tej funkcji jest określona wzorem

A. $f'(x)=\frac{3}{2x}$

B. $f'(x)=\frac{-3x^2-2x+3}{2x}$

C. $f'(x)=\frac{-3x^2-2x+3}{(x^2+1)^2}$

D. $f'(x)=\frac{9x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$

Zadanie 27. (0-1) *CKE (lipiec 2020)*

Granica ciągu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4}-x\right)$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** -2

Zadanie 28. (0-7) *CKE (lipiec 2020)*

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa d.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

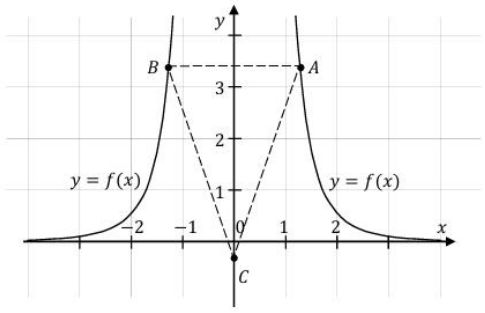
Zadanie 29. (0-1) *CKE (marzec 2021)*

Prosta dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 5$ w punkcie

A. $(-1,6)$ **B.** $(0,5)$ **C.** $(1,5)$ **D.** $(2,3)$

Zadanie 30. (0-7) *CKE (marzec 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9}{x^4}$ dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$, a punkty A i B są położone symetrycznie względem osi Oy (zobacz rysunek).



Oblicz współrzędne wierzchołków A i B, dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 31. (0-7) *CKE (maj 2021)*

Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144 m ^{3}. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

- 100 zł za 1 m^2 dna,
- 75 zł za 1 m^2 ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 32. (0-5) *CKE (czerwiec 2021)*

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^3+k}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Oblicz wartość k, dla której prosta o równaniu $y = -x$ jest styczna do wykresu funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0-7) *CKE (czerwiec 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty prostokątne ABC o przeciwprostokątnej AB i obwodzie równym 4. Niech $x = |AC|$.

Wykaż, że pole P trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{x(4-2x)}{4-x}$$

Wyznacz dziedzinę funkcji P. Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 34. (0-1) *CKE (maj 2022)*

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$.

Wartość pochodnej tej funkcji dla argumentu $x = \frac{1}{2}$ jest równa

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** 3 **D.** $\frac{54}{8}$

Zadanie 35. (0-7) *CKE (maj 2022)*

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18.

Wykaż, każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości b ramienia, wyraża się wzorem

$$P(b) = \frac{(18-2b)\cdot\sqrt{18b-81}}{2}$$

Wyznacz dziedzinę funkcji P. Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 36. (0-1) *CKE (czerwiec 2022)*

Granica $\lim\limits_{x\to-3} \frac{0{,}5x^2+3{,}5x+6}{-x^2+2x+15}$ jest równa

A. $\left(-\frac{1}{8}\right)$ **B.** $\frac{1}{16}$ **C.** $\left(-\frac{1}{16}\right)$ **D.** $\frac{7}{4}$

Zadanie 37. (0-7) *CKE (czerwiec 2022)*

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne ostrokątne ABC $(|AC| = |BC|)$, na których opisano okrąg o promieniu $R = 1$. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB trójkąta.

Wykaż, każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości x, wyraża się wzorem

$$P(x) = (x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

Wyznacz dziedzinę funkcji P. Oblicz długość odcinka x tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 38. (0-8) *CKE (Informator F2023)*

Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i długości wszystkich krawędzi są nie mniejsze niż 4.

Zadanie 38.1. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Wykaż, że układ równań

$$\begin{cases} \boldsymbol{4a + 4b + 4c = 80} \\ \boldsymbol{2ab + 2bc + 2ca = 256} \end{cases}$$

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$.

Zadanie 38.2. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Objętość V każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

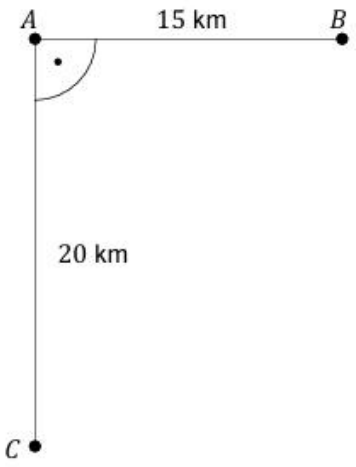
$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c$$

gdzie $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$ jest długością jednej z krawędzi bryły.

Oblicz objętość tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego objętość jest najmniejsza. Zapisz obliczenia.

Zadanie 39. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, BiC oraz zaznaczono odległości między nimi. O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele" i przemieszczał się z prędkością $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze" i przemieszczał się z prędkością $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza. Zapisz obliczenia.

Zadanie 40. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

$$P(Q) = 90 - 0{,}1Q \quad \text{dla} \quad Q \in [0{,}900]$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q – ilością produktu w tys. sztuk. Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0{,}002Q^3 + Q^2 + 29{,}9985Q + 50$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł.

Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk. Zapisz obliczenia.

Zadanie 41. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane zależnością

$$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t \quad \text{dla} \quad t \in [0{,}24]$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach. Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz największą prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę. Zapisz obliczenia.

Zadanie 42. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^4 + 0{,}5 \cdot (2x + 1)^4$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji. Zapisz obliczenia.

Zadanie 43. (0-3) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

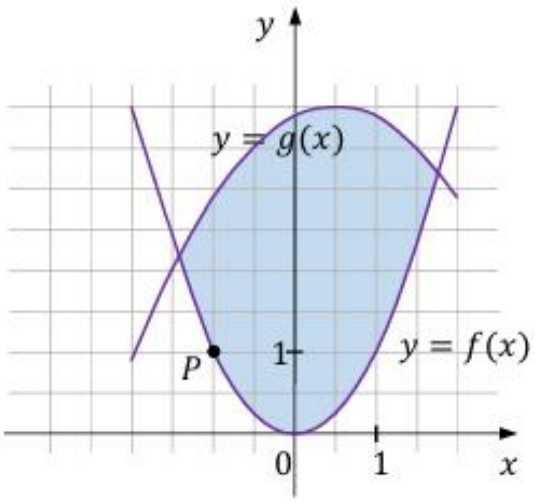
$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3, -3)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 44. (0-8) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g (zobacz rysunek). Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$.



Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (-1,1)$.

Zadanie 44.1. (0-2) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie funkcji g.

Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 44.2. (0-6) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

Oblicz współrzędne punktu K, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca K toru od początku P) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru. Zapisz obliczenia.

Zadanie 45. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-1,3]$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 46. (0-6) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

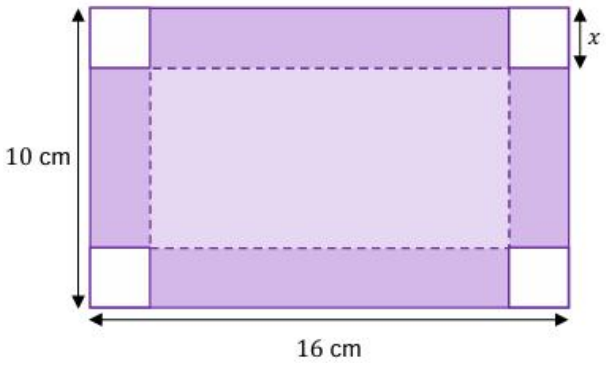
Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważamy wszystkie trójkąty spełniające warunki:

- są wpisane w ten okrąg,
- mają obwody równe $3R$,
- mają jeden z boków dwukrotnie dłuższy od drugiego.

Znajdź trójkąt o możliwie największym polu przy zadanych warunkach. Oblicz jego pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 47. (0-6) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

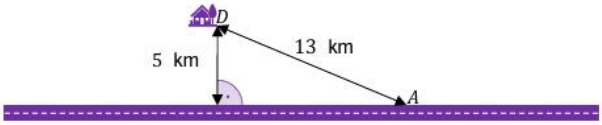
Grażyna planuje zrobienie pudełka (bez wieczka) w kształcie prostopadłościanu. W tym celu zamierza wykorzystać prostokątny kawałek tektury o wymiarach 10 cm × 16 cm, odcinając z każdego rogu kwadrat o boku x cm (zobacz rysunek).



Oblicz wartość x, dla której objętość otrzymanego pudełka będzie największa. Oblicz tę największą objętość pudełka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 48. (0-6) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Dom D stoi w odległości 5 km od prostoliniowego odcinka drogi. W chwili początkowej Janusz znajduje się na tej drodze w punkcie A oddalonym od domu D o 13 km (zobacz rysunek). Janusz może iść drogą z maksymalną prędkością $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, zaś poza nią może poruszać się z maksymalną prędkością $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Oblicz najkrótszy czas potrzebny Januszowi na dojście do domu *D*. Zapisz obliczenia.

Zadanie 49. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

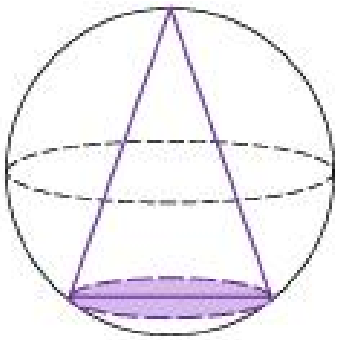
Ciężarówka ma do pokonania trasę długości S km, poruszając się po autostradzie ze stałą prędkością v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, maksymalna – $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wiemy, że litr paliwa kosztuje 8 złotych, a kierowca otrzymuje 42 złote za godzinę swej pracy. Zużycie paliwa w ciągu jednej godziny jazdy autostradą w zależności od prędkości v wyrażone w litrach można opisać funkcją $f(v) = 7 + \frac{v^2}{400}$.

Oblicz, przy jakiej prędkości koszt przejazdu będzie najmniejszy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 50. (0-6) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki zawierające środek kuli i wpisane w tę kulę, to znaczy takie, w których:

- wierzchołek leży na powierzchni kuli,
- okrąg, będący krawędzią podstawy stożka, leży na powierzchni kuli (zobacz rysunek).

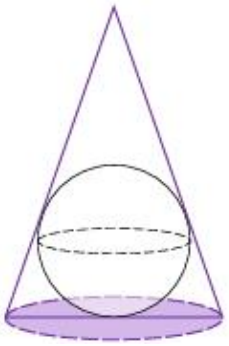


Oblicz promień podstawy tego stożka, który ma największą objętość. Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 51. (0-7) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki opisane na tej kuli, to znaczy takie, których:

- podstawa ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą,
- każda tworząca ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą (zobacz rysunek).



Zadanie 51.1. (0-2) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Wykaż, że objętość V stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}$$

Zadanie 51.2. (0-5) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Oblicz wysokość tego stożka, który ma najmniejszą objętość. Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

Zadanie 52. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Dane są funkcje k oraz p. Funkcja k jest określona wzorem $k(x) = 5 - x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Funkcja p jest określona wzorem $p(x) = \sqrt{1-x}$ dla każdej liczby rzeczywistej x nie większej od 1. Funkcje f oraz g są określone następująco:

$$f = k \circ p \quad \text{oraz} \quad g = p \circ k$$

Wyznacz wzory i dziedziny funkcji f oraz g. Zapisz obliczenia.

Zadanie 53. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{1+4x}$$

dla $x \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 2$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 54. (0-6) *CKE (grudzień 2022)*

Prosta k o równaniu $x + y - 9 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ w punktach A oraz B. Pierwsza współrzędna punktu A jest liczbą dodatnią; pierwsza współrzędna punktu B jest liczbą ujemną. Prosta l jest równoległa do prostej k i styczna do danej paraboli w punkcie C.

Oblicz odległość punktu C od prostej k oraz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 55. (0-4) *CKE (grudzień 2022)*

Olejarnia wytwarza olej ekologiczny. Aby produkcja była opłacalna, dzienna wielkość produkcji musi wynosić co najmniej 480 litrów i nie może przekroczyć 530 litrów (ze względu na ograniczone moce produkcyjne). Przy poziomie produkcji $(480 + x)$ litrów dziennie przeciętny koszt K (w złotych) wytworzenia jednego litra oleju jest równy

$$K(x) = \frac{22x^2 - 621{,}5x + 23430}{480 + x}, \quad \text{gdzie} \quad x \in [0{,}50]$$

Oblicz, ile litrów oleju dziennie powinna wytworzyć olejarnia, aby przeciętny koszt produkcji jednego litra oleju był najmniejszy (z zachowaniem opłacalności produkcji). Oblicz ten najmniejszy przeciętny koszt. Zapisz obliczenia.

Zadanie 56. (0-6) *CKE (maj 2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2\sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

dla każdej liczby dodatniej x.

Zadanie 56.1. (0-2) *CKE (maj 2023)*

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$\boldsymbol{f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2\sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x}$$

można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.

Zadanie 56.2. (0-4) *CKE (maj 2023)*

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby dodatniej x. Zapisz obliczenia.

Zadanie 57. (0-3) *CKE (maj 2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f.

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Zapisz obliczenia.

Zadanie 58. (0-3) *CKE (czerwiec 2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

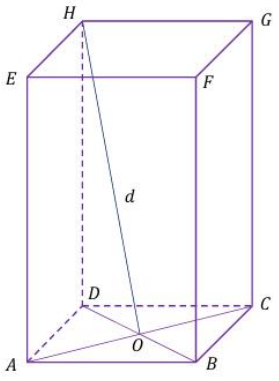
$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Punkt $P = (x_0, 18)$ należy do wykresu funkcji f.

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Zapisz obliczenia.

Zadanie 59. (0-6) *CKE (czerwiec 2023)*

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne $ABCDEFGH$, w których odcinek łączący punkt O przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$ z dowolnym wierzchołkiem podstawy $EFGH$ ma długość d (zobacz rysunek).



Wyznacz zależność objętości V graniastosłupa od jego wysokości h i podaj dziedzinę funkcji $V(h)$. Wyznacz wysokość tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 60. (0-2) *CKE (maj 2024)*

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{(x-2)^2}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 61. (0-3) *CKE (maj 2024)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) punkt P, o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f. Prosta o równaniu $y=ax+b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P.

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 62. (0-6) *CKE (maj 2024)*

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

Zadanie 62.1. (0-2) *CKE (maj 2024)*

Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a)=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

Zadanie 62.2. (0-4) *CKE (maj 2024)*

Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3}]$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 63. (0-2) *CKE (czerwiec 2024)*

Oblicz granicę

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 64. (0-3) *CKE (czerwiec 2024)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$$

dla każdego $x \neq 4$. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (x_0, 5)$ należy do wykresu funkcji f.

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Zapisz obliczenia.

Zadanie 65. (0-6) *CKE (czerwiec 2024)*

Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma wysokości H ostrosłupa oraz promienia R okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa jest równa 6.

Zadanie 65.1. (0-2) *CKE (czerwiec 2024)*

Wykaż, że objętość V każdego z takich ostrosłupów w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$\boldsymbol{V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)}$$

Zadanie 65.2. (0-4) *CKE (czerwiec 2024)*

Objętość V każdego z takich ostrosłupów w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

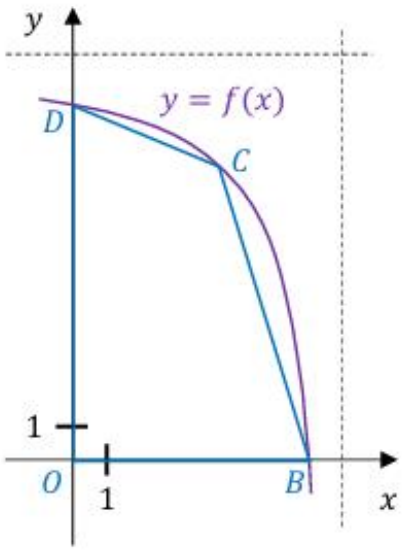
dla $R \in (0,6)$.

Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na podstawie tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 66. (0-6) *CKE (grudzień 2024)*

Funkcja F jest określona wzorem $f(x) = \frac{12x-84}{x-8}$ dla każdego $x \in (-\infty, 8)$. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) rozważamy wszystkie czworokąty $OBCD$, w których:

- wierzchołek O ma współrzędne $(0,0)$,
- wierzchołki B oraz D są punktami przecięcia wykresu funkcji f z osią – odpowiednio – Ox i Oy,
- wierzchołek C ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji f (zobacz rysunek).



Zadanie 66.1. (0-2) *CKE (grudzień 2024)*

Wykaż, że pole P czworokąta $OCBD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}}$$

Zadanie 66.2. (0-4) *CKE (grudzień 2024)*

Pole P czworokąta $OCBD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

dla $x \in (0,7)$.

Oblicz współrzędne wierzchołka C, dla których pole czworokąta $OBCD$ jest największe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 67. (0-6) *CKE (maj 2025)*

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

Zadanie 67.1. (0-2) *CKE (maj 2025)*

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}}$$

Zadanie 67.2. (0-4) *CKE (maj 2025)*

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 68. (0-6) *CKE (czerwiec 2025)*

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o polu powierzchni całkowitej równym $24\sqrt{3}$.

Zadanie 68.1. (0-2) *CKE (czerwiec 2025)*

Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$\boldsymbol{V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3}$$

Zadanie 68.2. (0-4) *CKE (czerwiec 2025)*

Objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

dla $a \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

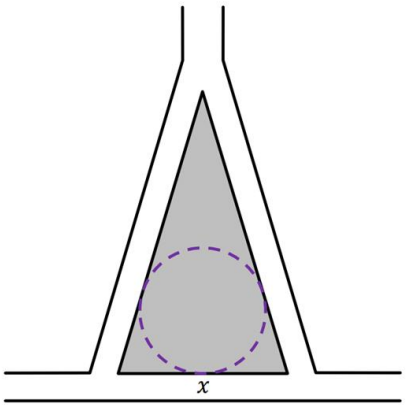
Zadanie 69. (0-4) *CKE (czerwiec 2025)*

Wielomian f zmiennej rzeczywistej x jest określony wzorem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Liczba (-2) jest miejscem zerowym tego wielomianu. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) styczna do wykresu wielomianu f w punkcie A o pierwszej współrzędnej równej (-2) przecina ten wykres w punkcie $P = (1,9)$.

Wyznacz wzór wielomianu f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 70. (0-7) *CKE (maj 2026)*

W projekcie ogrodu zaplanowano kwietnik w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie długości x metrów nieprzekraczającej 10 metrów. Na tym kwietniku ma znajdować się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 metrów, które ma być styczne do każdego z boków trójkątnego kwietnika (zobacz rysunek). Projektantowi zależy, aby przy tak ustalonej wielkości fontanny pole tego kwietnika było najmniejsze.



Zadanie 70.1. (0-3) *CKE (maj 2026)*

Wykaż, że pole P (wyrażone w metrach kwadratowych) trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}}$$

Zadanie 70.2. (0-4) *CKE (maj 2026)*

Pole P trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

dla $x \in (4,10]$.

Wyznacz długość x podstawy trójkątnego kwietnika, dla której pole tego kwietnika jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 71. (0-3) *CKE (czerwiec 2026)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{ax^2 + x}{x - 1}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz wszystkie wartości a, dla których pochodna funkcji f w punkcie $x = a$ jest równa $\left(-\frac{1}{2}a\right)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 72. (0-6) *CKE (czerwiec 2026)*

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne ABC, w których $C = (0,0)$, wierzchołek B leży na dodatniej półosi Oy, wierzchołek A leży na dodatniej półosi Ox, natomiast bok AB jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt $K = (1,2)$.

Zadanie 72.1. (0-2) *CKE (czerwiec 2026)*

Wykaż, że pole P trójkąta ABC w zależności od współczynnika kierunkowego a prostej AB jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(a) = \frac{-a^2 + 4a - 4}{2a}}$$

Zadanie 72.2. (0-4) *CKE (czerwiec 2026)*

Pole P trójkąta ABC w zależności od współczynnika kierunkowego a prostej AB jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{-a^2 + 4a - 4}{2a}$$

dla $a < 0$.

Wyznacz równanie prostej zawierającej przeciwprostokątną AB tego z rozważanych trójkątów, który ma najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Prawdopodobieństwo i kombinatoryka

Zadanie 1. (0-5) *CKE (grudzień 2014)*

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę", pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę". Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-4) *CKE (maj 2015)*

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-5) *CKE (czerwiec 2015)*

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0-3) *CKE (maj 2016)*

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

Zadanie 5. (0-2) *CKE (maj 2016)*

Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	**Liczba osób popierających budowę przedszkola**	**Liczba osób niepopierających budowy przedszkola**
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. (0-4) *CKE (czerwiec 2016)*

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-2) *CKE (czerwiec 2016)*

Dane są zdarzenia losowe $A, B \subseteq \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{2}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Oblicz $P(B \setminus A)$, gdzie zdarzenie $B \setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń B i A. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (0-4) *CKE (maj 2017)*

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-4) *CKE (czerwiec 2017)*

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15.

Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-4) *CKE (maj 2018)*

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-4) *CKE (czerwiec 2018)*

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0; 1; 3; 5; 7; 9\}$, losujemy jedną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-3) *CKE (maj 2019)*

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry.

Oblicz sumę wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-1) *CKE (maj 2019)*

Zdarzenia losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B' przeciwnego do zdarzenia B, jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

Wynika stąd, że

A. $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ **B.** $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$ **C.** $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ **D.** $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$

Zadanie 14. (0-3) *CKE (czerwiec 2019)*

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0-2) *CKE (czerwiec 2019)*

W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych. Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 16. (0-4) *CKE (czerwiec 2020)*

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-1) *CKE (czerwiec 2020)*

Mamy dwie urny. W pierwszej są 3 kule białe i 7 kul czarnych, w drugiej jest jedna kula biała i 9 kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek, od jednego oczka do sześciu oczek. Jeśli w wyniku rzutu otrzymamy ściankę z jednym oczkiem, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – losujemy jedną kulę z drugiej urny.

Wtedy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** $\frac{13}{15}$

Zadanie 18. (0-3) *CKE (lipiec 2020)*

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0-2) *CKE (marzec 2021)*

Oblicz, ile jest liczb dziesięciocyfrowych takich, że suma cyfr w każdej z tych liczb jest równa 13 i żadna cyfra nie jest zerem. W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 20. (0-1) *CKE (marzec 2021)*

Dane są dwie urny z kulami. W pierwszej urnie jest 10 kul: 8 białych i 2 czarne, w drugiej jest 8 kul: 5 białych i 3 czarne. Wylosowanie każdej z urn jest jednakowo prawdopodobne. Wylosowano jedną z tych urn i wyciągnięto z niej losowo jedną kulę. Wyciągnięta kula była czarna.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana kula pochodziła z pierwszej z tych urn, jest równe

A. $\frac{2}{18}$ **B.** $\frac{15}{23}$ **C.** $\frac{8}{23}$ **D.** $\frac{5}{18}$

Zadanie 21. (0-4) *CKE (maj 2021)*

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18. Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-4) *CKE (czerwiec 2021)*

W pewnym telewizyjnym programie bierze udział trzech sportowców i pewna liczba aktorów. W trakcie tego programu uczestnicy siadają na fotelach w rzędzie, naprzeciw prowadzącego (liczba foteli jest równa liczbie uczestników). Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że cała trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc jest równe $\frac{1}{15}$.

Oblicz, ilu aktorów bierze udział w tym programie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-1) *CKE (maj 2022)*

Dane są dwie urny z kulami. W każdej z urn jest siedem kul. W pierwszej urnie są jedna kula biała i sześć kul czarnych, w drugiej urnie są cztery kule białe i trzy kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – jedną kulę z drugiej urny.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kulę białą w tym doświadczeniu, jest równe

A. $\frac{5}{14}$ **B.** $\frac{9}{14}$ **C.** $\frac{5}{7}$ **D.** $\frac{6}{7}$

Zadanie 24. (0-3) *CKE (czerwiec 2022)*

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste. Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0-2) *CKE (czerwiec 2022)*

Wśród 390 pracowników pewnej firmy jest 150 kobiet i 240 mężczyzn. Wśród nich w wieku przedemerytalnym jest 21 kobiet i 43 mężczyzn.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pracownik tej firmy jest w wieku przedemerytalnym – pod warunkiem że jest mężczyzną. W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 26. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru $\mathbb{M} = \{1; 2; 3; \ldots; 3n + 1\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru $\mathbb{M}$ trzech liczb, których suma przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Pewna choroba dotyka 0,2% całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę), jest równe 0,99. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe 0,98. Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pan X jest rzeczywiście chory. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0-4) *CKE (Informator F2023)*

Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 40% rozegranych z synem partii wygrywa.

Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od 0,95. Zapisz obliczenia.

Zadanie 29. (0-4) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-3) *CKE (grudzień 2022)*

Maszyna napełnia torebki herbatą. Każda torebka ma zostać napełniona 200 g herbaty. Torebkę, która zawiera mniej niż 200 g herbaty, nazywamy torebką z niedowagą. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza torebka napełniona przez tę maszynę jest z niedowagą, jest równe 0,1. Kontroli poddano masę herbaty w torebkach napełnianych przez tę maszynę danego dnia. Do kontroli wybrano losowo 20 torebek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 20 losowo wybranych torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą. Zapisz obliczenia. Wynik zapisz w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zadanie 31. (0-3) *CKE (maj 2023)*

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 32. (0-3) *CKE (czerwiec 2023)*

Wśród n osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te n osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych n osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności).

Oblicz n. Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0-3) *CKE (czerwiec 2023)*

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe 0,1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie siedmiu dni wystąpią co najwyżej dwa takie dni, w których nastąpi awaria tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 34. (0-3) *CKE (maj 2024)*

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

Zadanie 35. (0-3) *CKE (maj 2024)*

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontroli poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań podanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 36. (0-3) *CKE (czerwiec 2024)*

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 37. (0-3) *CKE (grudzień 2024)*

W pewnej lokalnej społeczności 35% osób ma wyższe wykształcenie. W tej społeczności językiem niemieckim dobrze włada 70% osób mających wyższe wykształcenie i 40% osób bez wyższego wykształcenia. Spośród członków tej społeczności wybieramy losowo jedną osobę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybierzemy osobę z wyższym wykształceniem, jeżeli wiadomo, że ta osoba dobrze włada językiem niemieckim. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 38. (0-3) *CKE (maj 2025)*

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

Zadanie 39. (0-3) *CKE (czerwiec 2025)*

Rozważamy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb sześciocyfrowych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 40. (0-3) *CKE (czerwiec 2025)*

Sklep AGD prowadzi sprzedaż wysyłkową pralek. Prawdopodobieństwo uszkodzenia podczas transportu pralki wysłanej przez ten sklep do klienta jest równe 0,02.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że spośród 10 pralek wysłanych dziesięciu klientom przez ten sklep co najwyżej jedna ulegnie uszkodzeniu podczas transportu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 41. (0-3) *CKE (maj 2026)*

Ze zbioru ośmiu liczb {1,2,3,4,5,6,7,8} losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielną przez 3. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 42. (0-3) *CKE (czerwiec 2026)*

Rozważamy wszystkie dziewięciocyfrowe kody, które spełniają jednocześnie następujące warunki:

- na pierwszym miejscu kodu znajduje się cyfra 2,
- cyfra 4 występuje w kodzie dokładnie trzy razy,
- cyfra 8 występuje dokładnie dwa razy,
- pozostałe cyfry kodu są parami różnymi liczbami nieparzystymi.

Oblicz liczbę wszystkich takich kodów. Zapisz obliczenia.

Zadanie 43. (0-4) *CKE (czerwiec 2026)*

Chleb sprzedawany w pewnym supermarkecie pochodzi z trzech piekarni: $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.
Stosunek liczby bochenków chleba dostarczonego przez piekarnie $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ oraz $\mathcal{P}_3$ do tego supermarketu jest – odpowiednio – równy 2:3:4. Liczba bochenków chleba razowego dostarczonego do tego supermarketu z piekarni:

- $\mathcal{P}_1$ stanowi 10% liczby wszystkich bochenków chleba dostarczonego z tej piekarni,
- $\mathcal{P}_2$ stanowi 12% liczby wszystkich bochenków chleba dostarczonego z tej piekarni,
- $\mathcal{P}_3$ stanowi 15% liczby wszystkich bochenków chleba dostarczonego z tej piekarni.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że bochenek chleba losowo wybrany w tym supermarkecie pochodzi z piekarni $\mathcal{P}_1$, jeśli wiadomo, że ten chleb jest razowy. Zapisz obliczenia.

Dowodzenie

Zadanie 1. (0-3) *CKE (grudzień 2014)*

Wykaż, że jeżeli $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$.

Zadanie 2. (0-4) *CKE (grudzień 2014)*

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$, to $\cos\gamma < 0$.

Zadanie 3. (0-3) *CKE (grudzień 2014)*

Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| > |BC|$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $|\sphericalangle AEF| = 90°$.

Udowodnij, że $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAF|$.

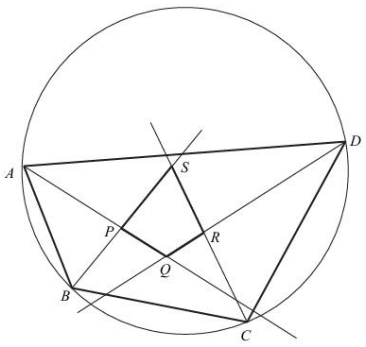
Zadanie 4. (0-3) *CKE (maj 2015)*

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$$

Zadanie 5. (0-3) *CKE (maj 2015)*

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P, Q, R, S (zobacz rysunek).



Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

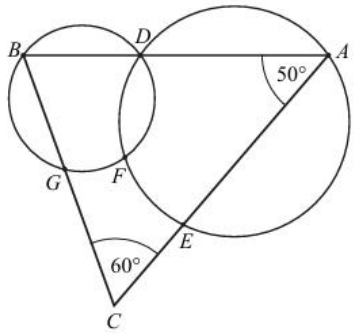
Zadanie 6. (0-3)

Niech $a = \log_{12}2$.

Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

Zadanie 7. (0-3) *CKE (czerwiec 2015)*

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę 50°, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60° Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B, przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G.



Wykaż, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

Zadanie 8. (0-4) *CKE (czerwiec 2015)*

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC. Punkt S jest środkiem odcinka BD. Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P.

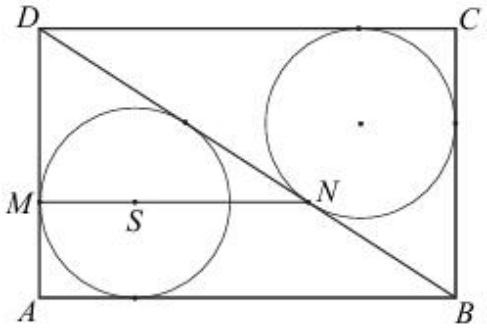
Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

Zadanie 9. (0-3) *CKE (maj 2016)*

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

Zadanie 10. (0-3) *CKE (maj 2016)*

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.



Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

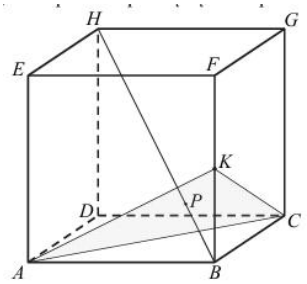
Zadanie 11. (0-3) *CKE (czerwiec 2016)*

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

Zadanie 12. (0-3) *CKE (czerwiec 2016)*

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Zadanie 13. (0-3) *CKE (maj 2017)*

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

Zadanie 14. (0-3) *CKE (maj 2017)*

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E.

Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

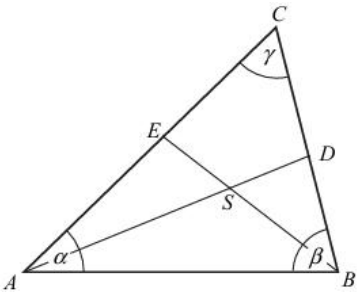
Zadanie 15. (0-3) *CKE (czerwiec 2017)*

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$$

Zadanie 16. (0-3) *CKE (czerwiec 2017)*

Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$ Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).



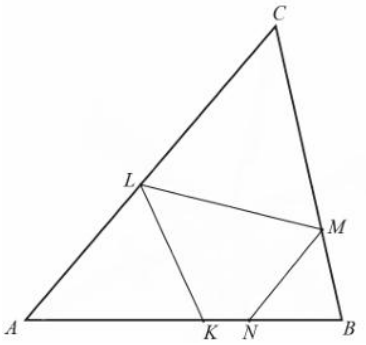
Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

Zadanie 17. (0-3) *CKE (maj 2018)*

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 18. (0-3) *CKE (maj 2018)*

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC| > |BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K. Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC, punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB, a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

Zadanie 19. (0-3) *CKE (czerwiec 2018)*

Wykaż, że równanie

$$x^8 + x^2 = 2(x^4 + x - 1)$$

ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = 1$.

Zadanie 20. (0-3) *CKE (czerwiec 2018)*

W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC.

Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.

Zadanie 21. (0-3) *CKE (czerwiec 2018)*

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4}$$

Zadanie 22. (0-3) *CKE (maj 2019)*

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$$

Zadanie 23. (0-3) *CKE (maj 2019)*

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M $\left(M \neq A \quad \text{i} \quad M \neq C\right)$, a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T.

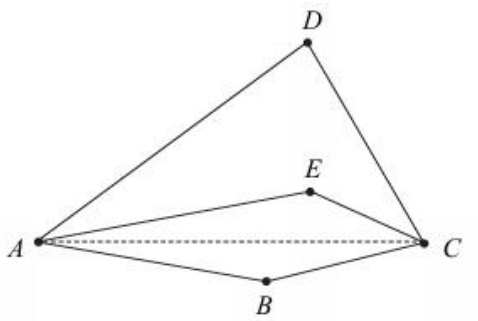
Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

Zadanie 24. (0-3) *CKE (czerwiec 2019)*

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

Zadanie 25. (0-3) *CKE (czerwiec 2019)*

Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E, przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2 \cdot |\sphericalangle AEC| = 360°$.

Zadanie 26. (0-3) *CKE (czerwiec 2020)*

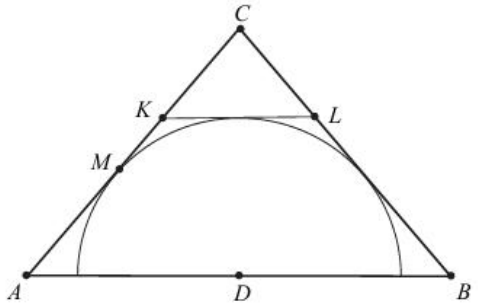
Liczby dodatnie a i b spełniają równość

$$a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$$

Wykaż, że $a = 2b$.

Zadanie 27. (0-3) *CKE (czerwiec 2020)*

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC| = |LC| = 2$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

Zadanie 28. (0-3) *CKE (lipiec 2020)*

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

Zadanie 29. (0-3) *CKE (lipiec 2020)*

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty A, B, C i D.

Wykaż, że jeżeli $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$.

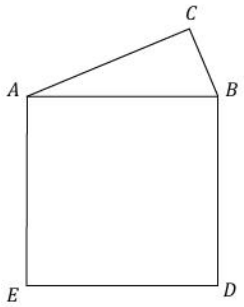
Zadanie 30. (0-3) *CKE (marzec 2021)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$$

Zadanie 31. (0-3) *CKE (marzec 2021)*

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ABDE$ (zobacz rysunek). Stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest równy k.



Wykaż, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2k}$.

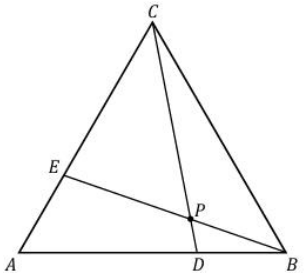
Zadanie 32. (0-3) *CKE (maj 2021)*

Niech $\log_2 18 = c$.

Wykaż, że $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$.

Zadanie 33. (0-3) *CKE (maj 2021)*

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

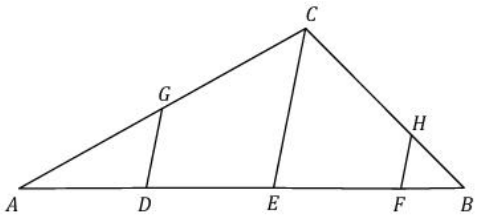
Zadanie 34. (0-3) *CKE (czerwiec 2021)*

Niech $\log_2 9 = c$.

Wykaż, że $\log_3 54 = \frac{3c+2}{c}$.

Zadanie 35. (0-3) *CKE (czerwiec 2021)*

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta obrano punkty D, E i F tak, że $|AD| = |DE| = |EF| = 2|FB|$. Na bokach AC i BC obrano – odpowiednio – punkty G i H tak, że $DG \parallel EC$ oraz $FH \parallel EC$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli pole trójkąta FBH jest równe S, to pole trójkąta ADG jest równe $3S$.

Zadanie 36. (0-3) *CKE (maj 2022)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$$

Zadanie 37. (0-3) *CKE (maj 2022)*

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB. Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB.

Wykaż, że spełniony jest warunek

$$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$$

Zadanie 38. (0-3) *CKE (czerwiec 2022)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$, spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

Zadanie 39. (0-3) *CKE (czerwiec 2022)*

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przez punkt O przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków BC i AD. Prosta równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie B', a prosta równoległa do boku AD przecina bok AB w punkcie A'.

Wykaż, że $|AA'| = |BB'|$.

Zadanie 40. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{3x}{x+1}$$

dla każdego $x \in (-1, +\infty)$.

Wykaż, że f jest funkcją rosnącą.

Zadanie 41. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$$

dla każdego $x > 0$.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Zadanie 42. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Zadanie 43. (0-3) *CKE (Informator F2023)*

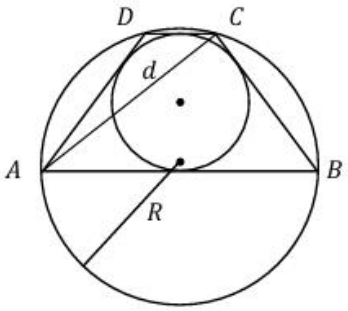
Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

Zadanie 44. (0-3) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

Zadanie 45. (0-4) *CKE (Arkusz pokazowy F2023)*

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie L i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.

Zadanie 46. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześcianów liczb x i y jest podzielna przez 9.

Zadanie 47. (0-4) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 7. Jedna z tych liczb jest wielokrotnością liczby 7.

Wykaż, że iloczyn $a \cdot b \cdot c$ jest podzielny przez 294.

Zadanie 48. (0-3) *CKE (Zbiór zadań F2023)*

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{5 + x^2} - 3^{-x-1}$$

dla dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej x.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe dodatnie mniejsze od 3.

Zadanie 49. (0-3) *CKE (grudzień 2022)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y, spełniających warunek $x + y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$$

Zadanie 50. (0-4) *CKE (grudzień 2022)*

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki BC, AC i AB tego trójkąta w punktach – odpowiednio – K, L oraz M. Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Na czworokątach $CLPK$ oraz $BKPM$ można opisać okrąg.

Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.

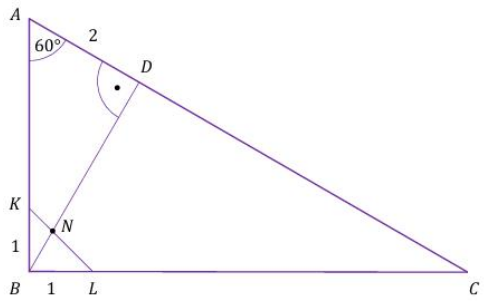
Zadanie 51. (0-3) *CKE (maj 2023)*

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$.

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

Zadanie 52. (0-3) *CKE (maj 2023)*

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

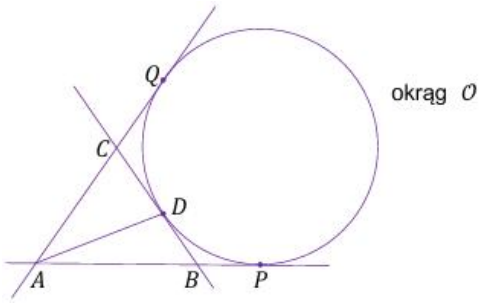
Zadanie 53. (0-3) *CKE (czerwiec 2023)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

Zadanie 54. (0-3) *CKE (czerwiec 2023)*

Dany jest okrąg O. Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q. Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D, która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 55. (0-3) *CKE (maj 2024)*

Wykaż, że jeżeli $a = \log_5 4$ oraz $b = \log_4 3$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.

Zadanie 56. (0-3) *CKE (maj 2024)*

Dany jest trójkąt ABC, który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC.

Wykaż, że prawdziwa jest równość $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$.

Zadanie 57. (0-3) *CKE (czerwiec 2024)*

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a oraz dla każdej liczby dodatniej b, spełniających warunek $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

Zadanie 58. (0-3) *CKE (czerwiec 2024)*

Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a oraz b, przy czym $a > b$. W ten trapez można wpisać okrąg.

Wykaż, że pole tego trapezu jest większe od $a \cdot b$.

Zadanie 59. (0-3) *CKE (grudzień 2024)*

Wykaż, że $\frac{1}{\log_2 35+1} + \frac{1}{\log_7 140-\log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+1} = 1$

Zadanie 60. (0-2) *CKE (grudzień 2024)*

Okrąg O jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz przecina bok AB tego trójkąta w punktach M oraz N, przy czym $0 < |AM| < |AN| < |AB|$.

Wykaż, że jeśli $|AM| = |BN|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 61. (0-3) *CKE (maj 2025)*

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

Zadanie 62. (0-4) *CKE (maj 2025)*

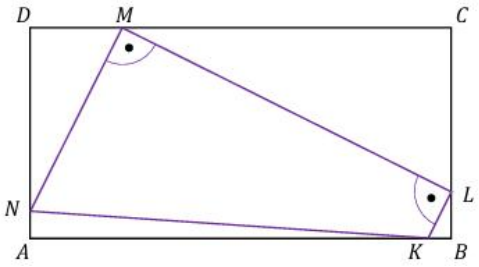
W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD, a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.

Zadanie 63. (0-3) *CKE (czerwiec 2025)*

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

Zadanie 64. (0-3) *CKE (czerwiec 2025)*



Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Na bokach AB, BC, CD oraz DA tego prostokąta obrano punkty – odpowiednio – K, L, M oraz N (przy czym każdy z tych punktów leży na dokładnie jednym boku prostokąta $ABCD$). Czworokąt $KLMN$ jest trapezem prostokątnym (zobacz rysunek), a wysokość LM tego trapezu jest równoległa do przekątnej BD prostokąta.

Wykaż, że stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16.

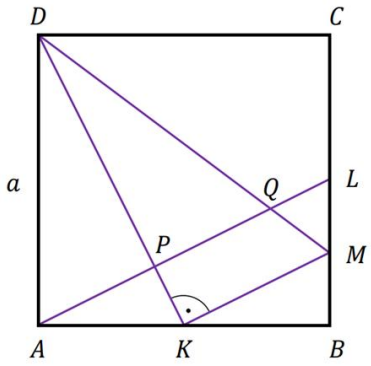
Zadanie 65. (0-3) *CKE (maj 2026)*

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$$

Zadanie 66. (0-3) *CKE (maj 2026)*

Punkty K i L są środkami – odpowiednio – boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a. Punkt M jest takim punktem na boku BC, że odcinki DK i KM są prostopadłe. Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Zadanie 67. (0-3) *CKE (czerwiec 2026)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$xy + x + y \leq x^2 + y^2 + 1$$

Zadanie 68. (0-3) *CKE (maj 2026)*

Odcinek CD jest wysokością trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Prosta p jest prostopadła do boku BC i przecina ten bok w punkcie L. Ta prosta przecina wysokość CD w punkcie K oraz przecina bok AC w punkcie różnym od A.

Wykaż, że $|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle KDL|$.

Odpowiedzi do zadań

Liczby

1. 210

2. C

3. C

4. A

5. B

6. C

7. A

8. D

9. A

10. D

11. B

12. B

13. C

14. D

15. A

16. D

17. $4\sqrt[3]{36}$

18. $a \cdot b$

19. $\frac{1}{3}$

20. $\frac{9}{2}$

21. 2023

22. 3^{-3}

Funkcja kwadratowa

1. $\frac{7}{39}$

2. $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$

3. $m = -4$

4. $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$

5. $m \in \left(-\frac{13}{2}; -6\right) \cup \left(-6; -\frac{11}{2}\right)$

6. 225

7. $m \in (-\infty; -2)$

8. $m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{5}; \frac{3}{4}\right)$

9. $m \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (2, +\infty)$

10. $m \in (2; 3]$

11. $m \in \left\{-\frac{9}{5}; \frac{1}{4}\right\}$

12. $m \in (-\infty; -11) \cup [1; +\infty)$

13. $a \in \left(\sqrt{2}; 2\right)$

14. $m \in (-\infty; -1] \cup (0; 1)(1; 4]$

15. $m \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

16. $p \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$

17. $m \in \{4; 7\}$

18. $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right)$

19. $m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$

20. $m \in \left(-4 - 2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$

21. $m \in (-\infty, -3)$

22. $m \in \left\{1; \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}\right\}$

23. $m \in \left[\frac{1-2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1+2\sqrt{5}}{2}\right]$

24. $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$

25. $m = 2$

26. $m \in (1, +\infty)$

27. $m \in (-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$

Funkcja wielomianowa

1. A

2. D

3. $a \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$

4. 125

5. $m = 1, m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$

6. A

7. C

8. B

9. D

10. 0

11. C

12. 532

13. $m \in \left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right\}$

14. $m = 3, m \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$

15. $m \in \left(-\frac{11}{3}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup (1; 3)$

16. $x \in \left\{4 - \sqrt{13}; 4 + \sqrt{13}; 8\right\}$

17. $m = 2$

18. $m \in \left(-\infty; -\frac{19}{3}\right) \cup (2; 11) \cup (11; +\infty)$

Funkcja wymierna, wykładnicza i logarytmiczna

1. B

2. B

3. A

4. B

5. $\left(\sqrt[3]{4}; 4\right) \setminus \{2\}$

6. 166

7. $\log_a b = 3 \vee \log_a b = \frac{2}{3}$

8. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left(0; \frac{2}{3}\right] \cup (1; +\infty)$

9. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

10. $(11,-4),(12,-5),(14,-1),(15,-2)$

11. $x \in \left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right] \cup (4,+\infty)$

12. $x \in [-3,-2) \cup \left(2,\frac{5}{2}\right]$

13. $m(t) = 4 \cdot 0,81^t$, 5 dób

14. 59 °C

15. 120 s

16. 6 milikulombów

17. 25%

Funkcje trygonometryczne

1. C

2. $x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

3. A

4. C

5. $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right\}$

6. $x \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right)$

7. D

8. $x \in \left(\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right)$

9. $x \in \left\{\pi;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

10. $x \in \left\{\frac{5\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right\}$

11. $x \in \left\{\frac{7\pi}{18};\frac{11\pi}{18};0;\frac{2\pi}{3}\right\}$

12. A

13. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

14. $x \in \left\{\frac{7\pi}{30};\frac{19\pi}{30};\frac{11\pi}{30};\frac{23\pi}{30}\right\}$

15. $x \in \left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$

16. $x = k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

17. $x = -\frac{1}{8}\pi + k\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

18. D

19. $x \in \left\{\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{12}\right\}$

20. D

21. $x \in \left\{\frac{1}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi;\frac{1}{4}\pi;\frac{5}{4}\pi\right\}$

22. A

23. $x \in \left\{0;\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3};\pi\right\}$

24. $x \in \left\{\frac{\pi}{3};\pi;\frac{5}{9}\pi\right\}$

25. $x = \frac{2}{3}\pi$

26. $x \in \left\{0;\frac{1}{6}\pi;\frac{5}{6}\pi;\pi\right\}$

27. $x \in \left\{-\frac{5}{6}\pi;\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi\right\}$

28. $x = h\sqrt{\frac{h+l}{l-h}}$

29. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

30. $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{12}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

31. $x \in \left\{-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right\}$

32. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

33. $x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

34. $x \in \left\{-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right\}$

35. $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

36. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

37. $x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

38. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ciągi

1. 438

2. $S = \frac{\pi}{3}$

3. 143

4. $\begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \\ c = -28 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases}$

5. D

6. D

7. 187

8. C

9. 923

10. $a_1 = 10$, nie jest malejący

11. D

12. $\begin{cases} a = 5 \\ b = 9 \\ c = 13 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = \frac{31}{2} \\ b = 9 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$

13. B

14. 15

15. $a_n = 3n + 2, b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

16. 3

17. $\frac{2^{11}\pi}{3}$

18. 952/523/238/380/809/095

19. $\frac{1}{3}$

20. D

21. C

22. 3

23. 014

24. $\frac{10}{9}$

25. B

26. $\begin{cases} a = -36 \\ b = 144 \\ c = 324 \\ d = 504 \end{cases}$

27. 125

28. D

29. 411

30. 129

31. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

32. $a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

33. 7

34. $p = 3$

35. $n > 9$

36. -2

37. $\frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}}$

38. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 9 \end{cases}$

39. $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty), x = 6$

40. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$

41. $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

42. $\left(32,4,\frac{1}{2}\right)$

43. 2

44. $\frac{27}{2}$ ∨ 27

45. $\frac{245}{4}$

46. $\frac{1}{3}$

47. -1026168

48. $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

49. (1,3,9) ∨ $\left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right)$

Wartość bezwzględna

1. D

2. A

3. 512

4. A

5. $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

6. D

7. B

8. B

9. B

10. $a \in (-2; -1) \cup (3; 4)$

11. B

12. C

Planimetria

1. $\frac{15}{17}$

2. $\sqrt{\frac{253}{13}}$

3. $\sqrt{145}$

4. B

5. $\frac{-1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}$

6. C

7. $\left(252 - 144\sqrt{3}\right)\pi$

8. 72

9. 120

10. 18

11. 955

12. $\frac{5}{6}$

13. $45^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 60^\circ$

14. $\frac{4}{5}$

15. $-2 + \sqrt{14}$

16. A

17. dowód, $\frac{\sqrt{5}}{2}$

18. $\frac{11+18\sqrt{3}+10\sqrt{11}+5\sqrt{33}}{2}$

13. $x = -\frac{8}{3}$

14. $m \in (0; 2) \cup (2; 4)$

15. $x \in (-\infty, 1]$

16. rysunek, $m \in [-6,0)$

17. $\left[0, \frac{9}{4}\right], m \in (-5, -4) \cup \{0\} \cup (4,5)$

18. $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$

19. $x \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{14}{3}\right\}$

20. $x \in (-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

21. $x \in (-\infty, -5) \cup (-1,3) \cup (3, +\infty)$

19. 125

20. $60\left(2-\sqrt{3}\right), 20\left(2-\sqrt{3}\right), 20\left(2-\sqrt{3}\right)$

21. dowód, $x \in (0, R)$

22. $P = \frac{27648}{625}, L = 27{,}36$

23. $16\sqrt{3} + 10$

24. $2\sqrt{10}, 3\sqrt{6}, \sqrt{10}, 2\sqrt{6}$

25. $P_{AGF} = \frac{1}{12}a^2, P_{CEFG} = \frac{1}{6}a^2$

26. $\sqrt{21} - 3$

27. 2

28. 45 °

29. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

30. $|BC| = 5, |CD| = 6, P = 30\sqrt{3}$

31. 20

Geometria analityczna

1. C

2. $8\sqrt{2}$

3. B

4. $\frac{11}{35}$

5. $C = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right), D = (6,2)$

6. $C = (6,12)$

7. $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$

8. B

9. $y = -\frac{1}{8}x + 3 \vee y = -\frac{1}{2}x + 6$

10. B

11. $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right), C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$

12. C

13. $A = (0,0), B = (0,25), C = (12,9)$

14. $a \in \left\{6 - 6\sqrt{3}; 6; 6 + 6\sqrt{3}\right\}$

15. $3\sqrt{10}$

16. C

17. $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$

18. $B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right), C = (10,0), D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$

19. $b \in \left\{1 - \sqrt{2}; 1; 1 + \sqrt{2}\right\}$

20. $r = 5\sqrt{2}, P = (7,1)$

21. $P(m) = \frac{1}{2} \cdot \left|m^2 - m - 2\right|$ dla $m \neq \{-1; 2\}$, $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

22. B

23. $P = (-2,2) \quad \vee \quad P = \left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$

24. $B = (-1,-2) \quad \wedge \quad C = (4,3)$

$B = (9,8) \quad \wedge \quad C = (4,3)$
$B = (1,0) \quad \wedge \quad C = (-4,-5)$
$B = (-9,-10) \quad \wedge \quad C = (-4,-5)$

25. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$

26. C

27. $m \in \left(1-\sqrt{3}, 1\right]$

28. 63

29. $\frac{8}{17}$

30. (8,0)

31. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

32. $a = 5 \vee a = -\frac{1}{5}$

33. $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$

34. 20

35. $S = (6,7) \vee S = (-4,-3)$

36. $2\sqrt{13}$

37. $C = \left(\sqrt{5}-1, 3\sqrt{5}+3\right) \vee C = \left(-\sqrt{5}-1, -3\sqrt{5}+3\right)$

38. $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$, $B = (-1,-2)$, $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$

39. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$

40. $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

Stereometria

1. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

2. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

3. $\frac{500}{3}$

4. A

5. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

6. $\frac{9\sqrt{106}}{106}$

7. $18\sqrt{2}$

8. 624

9. $\frac{4\sqrt{3}}{13}$

10. 45°

11. $\sqrt{22}$

12. $V = R^3 \cdot \sin\alpha \cdot (1-\sin\alpha) \cdot \sqrt{2-2\sin\alpha}$

13. $\frac{\sqrt{6}}{6}a$

14. $\sqrt{2}$, ok. 20 ° (z tabeli przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych)

15. $\frac{\sqrt{2}}{36}$

16. rysunek, $\frac{27\sqrt{10}}{100}a^2$

17. $\sqrt{6}$

18. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$

19. $18\pi\sqrt{2}$

20. 918

21. 6

22. $a = 3\sqrt{6}, \cos\beta = \frac{5}{14}$

23. $\frac{63\sqrt{3}}{8}$

Optymalizacja

1. $f'(12) = \frac{3}{4}$

2. D

3. $y = 4x - 3$

4. 8 dm, $12\sqrt{3}$ dm ^{2}

5. $y = 4x + \frac{67}{27} \wedge y = 4x - 7$

6. $r = 4, H = 2\sqrt{5}, V = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$

7. C

8. $H = \frac{2\sqrt{5}}{5}, V = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$

9. A

10. $P(x) = 4 + 2x - x^2 - \frac{1}{2}x^3, C = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$

11. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}, V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

12. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

13. $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, h = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}, V = \frac{P}{3} \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

14. C

15. $P(x) = 4x^2 + \frac{24}{x}, x \in (1; 2), \sqrt[3]{3} \times 2\sqrt[3]{3} \times \frac{4}{3}\sqrt[3]{3}$

16. D

17. $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}-36}{36}\right)$

18. $a \in (1; 2)$, dowód, \tg \alpha = 1

19. 096

20. $V(x) = 8(11x^2 - 3x^3), x \in \left(0; \frac{5}{2}\right], x = \frac{22}{9}, V = \frac{42592}{243}$

21. 2019

22. $a = 2, H = \frac{2\sqrt{3}}{3}, P = 6\sqrt{3}$

23. $\frac{295}{2601}$

24. $P(x) = \sqrt{108x^2(6-x)}$, $x \in (0;6)$, 14,10,12, $P = 24\sqrt{6}$

25. 100×60[mm]

26. C

27. C

28. $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d, V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$

29. C

30. $A = \left(3, \frac{1}{9}\right), B = \left(-3, \frac{1}{9}\right), P = \frac{4}{3}$

31. $6 \times 6 \times 4$ [m]

32. $k = -\frac{4}{27}$

33. dowód, $x \in (0;2)$, $4 - 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2} - 4, P = 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

34. C

35. dowód, $b \in \left(\frac{9}{2}; 9\right)$, 6,6,6

36. B

37. dowód, $x \in (0;1), x = \frac{1}{2}, P = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

38. dowód, $V = 256$

39. 10:30

40. 25500

41. 962,5 m; $270{,}75\frac{\text{m}}{\text{h}}$

42. $\frac{1}{54}$

43. $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

44. dowód, $K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right), d = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

45. $[-1,35]$

46. $\frac{2}{3}R, \frac{4}{3}R, R; P = \frac{2}{9}R^2$

47. $x = 2, V = 144$

48. $\frac{224}{60}$ h

49. $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

50. $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}, V = \frac{32}{81}\pi$

51. dowód, $H = 4, V = \frac{8}{3}\pi$

52. $f(x) = x + 4$, $D_f = (-\infty, 1]$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}, D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

53. $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

54. $\frac{9}{\sqrt{2}}, P = 54$

55. 495 l, 38,50 zł

56. dowód, -4

57. $x_0 = -3, y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$

58. $x_0 = 2, y = 17x - 16$

59. $V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h\ ,\ h \in (0, d)\ ,\ h = \frac{\sqrt{3}}{3}d$

60. $-\infty$

61. $a = \frac{7}{2}, b = -5$

62. dowód, $a = 8\sqrt{3}, P = 96\sqrt{3} + 1728$

63. $-\frac{1}{6}$

64. $x_0 = 7, y = -x + 12$

65. dowód, $R = 4, V = 8\sqrt{3}$

66. dowód, $C = \left(8 - 2\sqrt{2}, 12 - 3\sqrt{2}\right)$

67. dowód, $h = 5\sqrt{3}, V = \frac{125\sqrt{3}}{2}\pi$

68. dowód, $a = 4, V = 16$

69. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

70. dowód, $x = 4\sqrt{3}, P = 12\sqrt{3}$

71. $a = 2$

72. dowód, $a = -2, y = -2x + 4$

Prawdopodobieństwo i kombinatoryka

1. $\frac{30}{91}$

2. $\frac{5}{11}$

3. 44361

4. uzasadnienie

5. 753

6. 28750

7. 314

8. $\frac{11}{16}$

9. 18

10. $\frac{5}{14}$

11. $\frac{11}{699840}$

12. 6666600

13. C

14. 147

15. 375

16. 12960

17. A

18. 147

19. 220

20. C

21. $\frac{1}{5}$

22. 7

23. A

24. 27500

25. 179

26. $\frac{3n^2-1}{(3n+1)(3n-1)}$

27. ok. 0,09

28. $n \geq 6$

29. $\frac{123841}{4^{15}}$

30. ok. 0,68

31. $\frac{1}{64}$

32. 9

33. ok. 0,97

34. 11040

35. ok. 0,996

36. $\frac{1}{15}$

37. ok. 0,49

38. $\frac{9}{25}$

39. 368586

40. ok. 0,984

41. $\frac{1}{28}$

42. 33600

43. $\frac{5}{29}$

Dowodzenie

1. dowód
2. dowód
3. dowód
4. dowód
5. dowód
6. dowód
7. dowód
8. dowód
9. dowód
10. dowód
11. dowód
12. dowód
13. dowód
14. dowód
15. dowód
16. dowód
17. dowód
18. dowód
19. dowód
20. dowód
21. dowód
22. dowód
23. dowód
24. dowód
25. dowód
26. dowód
27. dowód
28. dowód
29. dowód
30. dowód
31. dowód
32. dowód
33. dowód
34. dowód
35. dowód
36. dowód
37. dowód
38. dowód
39. dowód
40. dowód
41. dowód
42. dowód
43. dowód
44. dowód
45. dowód
46. dowód
47. dowód
48. dowód
49. dowód
50. dowód
51. dowód
52. dowód
53. dowód
54. dowód
55. dowód
56. dowód
57. dowód
58. dowód
59. dowód
60. dowód
61. dowód
62. dowód
63. dowód
64. dowód
65. dowód
66. dowód
67. dowód
68. dowód