Egzamin maturalny *Formuła 2023*

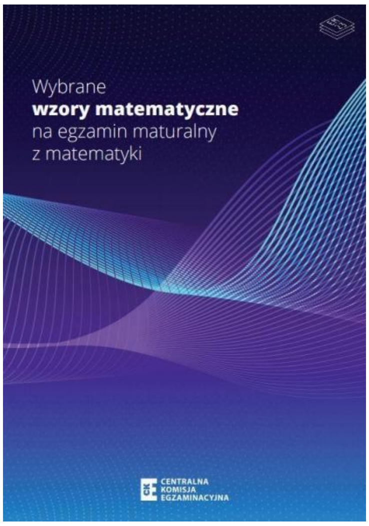
MATEMATYKA
Poziom rozszerzony

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Instrukcja pracy z arkuszem

1. Jest to arkusz stworzony na podstawie arkuszy CKE od 2023 roku.
2. Każde zadanie użyte w tym arkuszu ma realną szanse na pojawienie się w maju 2026 na prawdziwej maturze CKE.
3. Jeżeli nie potrafisz rozwiązać danego zadania z arkusza, to oznacz je w skali 1-5 jak bardzo trudne Ci się wydaje, gdzie 5 oznacza bardzo trudne i idź dalej.
4. Potraktuj ten arkusz jakby był prawdziwym arkuszem maturalnym CKE – używaj brudnopisu, a w kratkach pod zadaniami pisz przemyślane rozwiązania.
5. Gdy zrobisz zadania, które potrafiłeś, wróć do zadań oznaczonych najmniejszymi cyframi i spróbuj zrobić.
6. Jeśli spędzasz dużo czasu nad zadaniami i nic nie rusza do przodu, to znak, że czas się zatrzymać. To jest Twój poziom. Wróć na Webinar na 11:30 lub 13:15!
7. Oznacz zadania, które nie zostały przez Ciebie rozwiązane prawidłowo. To są konkretne typy zadań, nad którymi musisz jeszcze popracować.
8. Gdy skończysz: krótko omówimy arkusz + poznasz najlepsze tipy na ostatnie 100 dni nauki do matury (czas, plan pracy, sposób pracy, jak uzupełnić braki, co dokładnie robić)



Zadanie 1. (0-2)

Oblicz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n + 11^n}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-4)

Kasia postanowiła przygotować się do kartkówki rozwiązując 8 zadań ze zbioru. Prawdopodobieństwo rozwiązania pojedynczego zadania z tego zbioru przez Kasię wynosi $\frac{1}{3}$.

Oblicz prawdopodobieństwo samodzielnego rozwiązania przez Kasię co najmniej 6 zadań z tego zbioru. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 3. (0-3)

W trójkącie równoramiennym ABC z wierzchołka A poprowadzono wysokość która przecięła odcinek BC w punkcie D, w taki sposób, że $|BD|:|DC| = 1:2$. Następnie z wierzchołka B również poprowadzono wysokość, która przecięła odcinek AC w punkcie E, takim, że $|AE|:|EC| = 1:2$. Wysokości przecięły się w punkcie F. Udowodnij, że $\frac{|BC|}{|FD|} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 4. (0-3)

Wykaż, że dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{Z}$ wyrażenie $k^5 + 4k^4 + 3k^3 - 4k^2 - 4k$ jest podzielne przez 24. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+8}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $x_0 = 2$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-4)

Rozwiąż równanie $\sin(4x) - \cos(4x) = -1$ w przedziale $x \in [0, 2\pi]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-4)

Krawędź podstawy sześcianu ma długość a.

Wyznacz pole trójkątnej płaszczyzny tego sześcianu, która przechodzi przez przekątną podstawy i krawędź boczną oraz jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-6)

Trapez wpisano w okrąg w taki sposób, że podstawa AB jest średnicą okręgu. **Oblicz stosunek pól trójkąta ACD do trójkąta ABC, wiedząc, że $\frac{|AB|+|CD|}{L} = \frac{3}{4}$, gdzie L to obwód trapezu. Zapisz obliczenia.**

Zadanie 9. (0-5)

Wierzchołki trójkąta prostokątnego KLM są punktami paraboli o równaniu $y = x^2 + 4x$. Wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie L, przy którym jest kąt prosty. Bok MK jest równoległy do osi OX.

Oblicz współrzędne wierzchołków K i M. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-4)

Dany jest trójkąt równoboczny o boku 1. Na jego bokach zaznaczamy wierzchołki kolejnego trójkąta równobocznego w taki sposób, że wierzchołki nowo powstałego trójkąta dzielą bok w proporcji 1:4. Operacje powtarzamy w nieskończoność. Pola wszystkich trójkątów określonych w powyższy sposób tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

Zadanie 11. (0-6)

Dane jest równanie

$$x^2 + (1 - p)x - 2p + 7 = 0$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których to równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq x_1 + x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.

Zapisz obliczenia

Zadanie 12. (0-6)

Spośród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych wybrano ten, którego objętość jest największa. Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa x.
Wyznacz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)