Egzamin maturalny *Formuła 2025*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania. Rozwiązania nieuwzględnione w schemacie oceniania są oceniane na podstawie wymagań ogólnych zawartych w *Informatorze o egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym od roku szkolnego 2024/2025* (str. 8-9).
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0-2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^3-125}{(x-5)^2}$$

Zasady oceniania

2 pkt - zastosowanie poprawnej metody obliczenia granicy oraz poprawny wynik: $+\infty$.

1 pkt - zapisanie wyrażenia $\frac{x^3-125}{(x-5)^2}$ w postaci $\frac{x^2+5x+25}{x-5}$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Po podstawieniu 5^+ do wyrażenia $\frac{x^3-125}{(x-5)^2}$ otrzymujemy symbol nieoznaczony:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^3-125}{(x-5)^2} = \frac{(5^+)^3-125}{(5^+-5)^2} = \frac{(5^+)^3-125}{(5^+-5)^2} = \frac{125^+-125}{(0^+)^2} = \left[\frac{0^+}{0^+}\right],$$

zatem przekształcamy wyrażenie tak, aby zlikwidować czynnik powodujący powstawanie w wyniku symbolu nieoznaczonego, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia oraz definicji potęgowania:

$$\frac{x^3-125}{(x-5)^2} = \frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2+5x+25}{x-5}$$

dla każdego $x \neq 5$.

Ponownie podstawiamy 5^+ do wyrażenia $\frac{x^3-125}{(x-5)^2} = \frac{x^2+5x+25}{x-5}$:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^3-125}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5^+} \frac{x^2+5x+25}{x-5} = \frac{(5^+)^2+5\cdot(5^+)+25}{5^+-5} = \frac{75^+}{0^+} = +\infty$$

Zadanie 2. (0-2)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są dwie proste l_1 oraz l_2. Kąt między tymi prostymi ma miarę 60°. Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_1 wynosi $\frac{1}{5}$.

Oblicz współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_2.

Zasady oceniania

2 pkt - obliczenie i zapisanie dwóch możliwych wartości współczynnika kierunkowego prostej l_2: $a_2 = \frac{10-13\sqrt{3}}{11}$ albo $a_2 = \frac{10+13\sqrt{3}}{11}$.

1 pkt - obliczenie i zapisanie jednej z dwóch możliwych wartości współczynnika kierunkowego prostej l_2: $a_2 = \frac{10-13\sqrt{3}}{11}$ albo $a_2 = \frac{10+13\sqrt{3}}{11}$

LUB

zastosowanie wzoru na kąt między prostymi: $\sqrt{3} = \left|\frac{\frac{1}{5}-a_2}{1+\frac{1}{5}\cdot a_2}\right|$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Proste l_1 oraz l_2 przecinają się pod kątem 60°. Ich współczynniki kierunkowe a_1 i a_2 są równe tangensom kątów nachylenia do osi Ox.

$$a_1 = \tan\alpha = \frac{1}{5} \quad \text{oraz} \quad a_2 = \tan\beta$$

Sposób 1

Rozważmy dwa przypadki: $\beta = \alpha + 60^\circ$ lub $\beta = \alpha - 60^\circ$.

W pierwszym przypadku mamy:

$$\tan(\alpha + 60^\circ) = \frac{\tan\alpha + \tan 60^\circ}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 60^\circ} = \frac{\frac{1}{5} + \sqrt{3}}{1 - \frac{1}{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\frac{1+5\sqrt{3}}{5}}{\frac{5-\sqrt{3}}{5}} = \frac{1+5\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{10+13\sqrt{3}}{11}$$

W drugim przypadku analogicznie:

$$\tan(\alpha - 60^\circ) = \frac{\tan\alpha - \tan 60^\circ}{1 + \tan\alpha \cdot \tan 60^\circ} = \frac{\frac{1}{5} - \sqrt{3}}{1 + \frac{1}{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\frac{1-5\sqrt{3}}{5}}{\frac{5+\sqrt{3}}{5}} = \frac{1-5\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{10-13\sqrt{3}}{11}$$

Sposób 2

Korzystamy ze wzoru na kąt między prostymi:

$$\tan 60^\circ = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right|$$

$$\sqrt{3} = \left|\frac{\frac{1}{5} - a_2}{1 + \frac{1}{5}\cdot a_2}\right| \ / \ ()^2$$

$$3 = \frac{\frac{1}{25} - \frac{2}{5}a_2 + {a_2}^2}{1 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{25}{a_2}^2} \ / \cdot \left(1 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{25}{a_2}^2\right)$$

$$3 + \frac{6}{5}a_2 + \frac{3}{25}{a_2}^2 = \frac{1}{25} - \frac{2}{5}a_2 + {a_2}^2 \ / \cdot 25$$

$$75 + 30a_2 + 3{a_2}^2 = 1 - 10a_2 + 25{a_2}^2 \ / -(75 + 30a_2 + 3{a_2}^2)$$

$$22{a_2}^2 - 40a_2 - 74 = 0$$

Wyznaczamy rozwiązania powyższego równania:

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \cdot 22 \cdot (-74) = 1600 + 6512 = 8112$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8112} = 52\sqrt{3}$$

$$a_{2_1} = \frac{40 - 52\sqrt{3}}{44} = \frac{10 - 13\sqrt{3}}{11} \qquad a_{2_2} = \frac{40 + 52\sqrt{3}}{44} = \frac{10 + 13\sqrt{3}}{11}$$

Zadanie 3. (0-3)

Dane są liczby $a = \frac{9\log_5 12 \cdot \log_2 5}{\log_2 12}$ i $b = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25 + \log_5 5$.

Oblicz a^2b^2.

Zasady oceniania

3 pkt - poprawne obliczenie wartości wyrażenia $a^2b^2 = 2025$.
2 pkt - obliczenie wartości dwóch liczb $a = 9$ i $b = 5$.
1 pkt - obliczenie wartości jednej z dwóch liczb $a = 9$ lub $b = 5$.
0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy wartości liczb a i b, korzystając z własności logarytmów, w tym zamiany podstawy logarytmu:

$$a = \frac{9\log_5 12 \cdot \log_2 5}{\log_2 12} = \frac{9 \cdot \frac{\log_2 12}{\log_2 5} \cdot \log_2 5}{\log_2 12} = \frac{9 \cdot \frac{\log_2 12}{\log_2 5} \cdot \log_2 5}{\log_2 12} = \frac{9\log_2 12}{\log_2 12} = 9$$

$$b = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25 + \log_5 5 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{5}} \cdot \log_2 25 + 1 = \frac{\log_2 25}{\log_2 \sqrt{5}} + 1 =$$

$$= \log_{\sqrt{5}} 25 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Obliczamy wartość wyrażenia a^2b^2:

$$a^2b^2 = 9^2 \cdot 5^2 = (9 \cdot 5)^2 = 45^2 = 2025$$

Zadanie 4. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{8 - 27x}$$

dla $x \in \left(-\infty; \frac{8}{27}\right]$.

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = -5$.

Zasady oceniania

3 pkt - poprawne zapisanie równania prostej stycznej do wykresu funkcji f:

$y = -\frac{27\sqrt{143}}{286}x + \frac{151\sqrt{143}}{286}$.

2 pkt - obliczenie wartości współczynnika kierunkowego a prostej stycznej do wykresu funkcji f: $a = -\frac{27\sqrt{143}}{286}$

LUB

wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = -\frac{27}{2\sqrt{8-27x}}$ i obliczenie $y_0 = \sqrt{143}$.

1 pkt - wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = -\frac{27}{2\sqrt{8-27x}}$

LUB

obliczenie $y_0 = \sqrt{143}$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji f, która jest funkcją złożoną:

$$f'(x) = \left(\sqrt{8-27x}\right)' \cdot (8-27x)' = \frac{1}{2\sqrt{8-27x}} \cdot (-27) = -\frac{27}{2\sqrt{8-27x}}$$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = -5$:

$$a = f'(-5) = -\frac{27}{2\sqrt{8-27\cdot(-5)}} = -\frac{27}{2\sqrt{143}} = -\frac{27\sqrt{143}}{286}$$

Obliczamy y_0:

$$y_0 = f(-5) = \sqrt{8-27\cdot(-5)} = \sqrt{143}$$

Podstawiamy a, x_0 i y_0 do równania kierunkowego prostej $y = ax + b$ i obliczamy współczynnik b:

$$\sqrt{143} = -\frac{27\sqrt{143}}{286} \cdot (-5) + b$$

$$\sqrt{143} = \frac{135\sqrt{143}}{286} + b \;/ -\frac{135\sqrt{143}}{286}$$

$$b = \frac{151\sqrt{143}}{286}$$

Zatem prosta styczna do wykresu funkcji f wyrażona jest równaniem

$$y = -\frac{27\sqrt{143}}{286}x + \frac{151\sqrt{143}}{286}$$

Zadanie 5. (0-3)

Do egzaminu maturalnego z matematyki rozszerzonej przystąpiło ze wszystkich abiturientów 40% uczniów technikum. Prawdopodobieństwo tego, że uczeń technikum

uzyskał wynik wyższy lub równy 30% wynosi 0,1 . Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że uczeń liceum uzyskał wynik niższy niż 30% wynosi 0,3.
Z bazy wyników wylosowano pewnego ucznia, który z matury rozszerzonej uzyskał więcej niż 30%.
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ten uczeń rzeczywiście uczęszczał do technikum. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych.

Zasady oceniania
3 pkt - poprawne obliczenie prawdopodobieństwa $P(T|+) \approx 0{,}09$.
2 pkt - zastosowanie wzoru Bayesa: $P(T|+) = P(+|T) \cdot \frac{P(T)}{P(+|L)\cdot P(L)+P(+|T)\cdot P(T)}$.
1 pkt - obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(-|T) = 0{,}9$ oraz $P(+|L) = 0{,}7$.
0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Wypiszmy następujące zdarzenia elementarne:

$+$ - wylosowany uczeń uzyskał wynik wyższy lub równy 30%,

$-$ - wylosowany uczeń uzyskał wynik niższy niż 30%,

T - wylosowany uczeń uczęszczał do technikum,

L - wylosowany uczeń uczęszczał do liceum.

Obliczamy prawdopodobieństwa warunkowe potrzebne do obliczenia $P(T|+)$:

$$P(T) = 0{,}4, \quad \text{więc} \quad P(L) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$P(+|T) = 0{,}1, \quad \text{więc} \quad P(-|T) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

$$P(-|L) = 0{,}3, \quad \text{więc} \quad P(+|L) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Stosujemy twierdzenie Bayesa i obliczamy szukane prawdopodobieństwo:

$$P(T|+) = P(+|T) \cdot \frac{P(T)}{P(+|L) \cdot P(L) + P(+|T) \cdot P(T)}$$

$$P(T|+) = 0{,}1 \cdot \frac{0{,}4}{0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}4} = \frac{2}{23} \approx 0{,}09$$

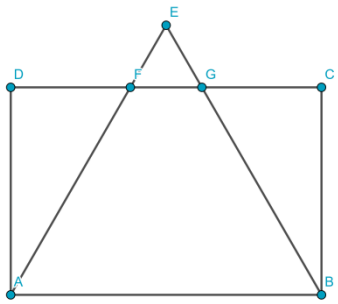
Zadanie 6. (0-3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$ i $|AD| = b$. Na boku AB zbudowano trójkąt równoboczny AEB (zobacz rysunek).

Wykaż, że stosunek pola trójkąta *EFG* do pola trójkąta *ABE* wynosi $1 - \frac{4\sqrt{3}b}{3a} + \frac{4b^2}{3a^2}$.
W rozwiązaniu zadania zastosuj twierdzenie sinusów.

Zasady oceniania

3 pkt - poprawne obliczenie stosunku pola trójkąta EFG do pola trójkąta ABE ze skali podobieństwa pól.



2 pkt - wykazanie podobieństwa trójkątów EFG i ABE i obliczenie $|DF|$ lub $|GC|$ z twierdzenia sinusów, i obliczenie $|FG|$.

1 pkt - wykazanie podobieństwa trójkątów EFG i ABE

LUB

obliczenie $|DF|$ lub $|GC|$ z twierdzenia sinusów.

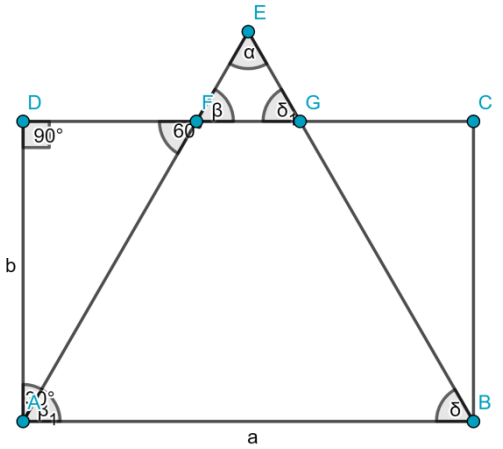
0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

- Jeżeli zdający rozwiązał zadanie bez wykorzystania twierdzenia sinusów, może otrzymać za rozwiązanie maksymalnie **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$ i $|AD| = b$. Na boku AB zbudowano trójkąt równoboczny AEB .



Zatem $|AB| = a = |CD|$, $|AD| = b = |BC|$ i $AB \parallel CD$,

więc:

$|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle AEB|$(kąt wspólny trójkątów EFG oraz ABE),

$|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle EFG|$ (kąty odpowiadające),

$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EGF|$ (kąty odpowiadające),

zatem $\Delta EFG \sim \Delta ABE$ (cecha kkk).

Ponieważ $|\sphericalangle BAE| = 60^\circ$(miara kąta trójkąta równobocznego), $|\sphericalangle FAD| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$|\sphericalangle DFA| = |\sphericalangle EFG| = 60^\circ$ (kąty wierzchołkowe)

Obliczamy długość odcinka DF z twierdzenia sinusów:

$$\frac{|AD|}{\sin 60^\circ} = \frac{|DF|}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|DF|}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{2}|DF|$$

$$|DF| = \frac{\sqrt{3}}{3}b$$

Ponieważ wysokość trójkąta AEB opuszczona na bok AB dzieli bok CD na dwie równe części (symetria osiowa), $|DF| = |GC| = \frac{\sqrt{3}}{3}b$, zatem

$$|FG| = |DC| - (|DF| + |GC|)$$
$$|FG| = |AB| - 2|DF|$$
$$|FG| = a - \frac{2\sqrt{3}}{3}b$$

Wyznaczamy stosunek pola trójkąta EFG do pola trójkąta ABE ze skali podobieństwa pól:

$$\frac{P_{\Delta EFG}}{P_{\Delta ABE}} = k^2 = \left(\frac{|FG|}{|AB|}\right)^2 = \left(\frac{a - \frac{2\sqrt{3}}{3}b}{a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\sqrt{3}b}{3a}\right)^2 = 1 - \frac{4\sqrt{3}b}{3a} + \frac{4b^2}{3a^2}$$

To kończy dowód.

Zadanie 7. (0-4)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + \frac{67}{8}x - 3$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że funkcja ma w przedziale $[0; 1]$ jedno rozwiązanie, a liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Zasady oceniania

4 pkt - przeprowadzenie pełnego dowodu.

3 pkt - podanie dla funkcji f 2 takich dwóch argumentów $x_3 < x_4$ leżących w przedziale $x \in \mathbb{R}$, dla których $f(x_3) < 5$ i $f(x_4) > 5$ i obliczenie wartości funkcji dla tych argumentów.

2 pkt - podanie dla funkcji f 2 takich dwóch argumentów $x_1 < x_2$ leżących w przedziale $[0; 1]$, dla których $f(x_1) < 0$ i $f(x_2) > 0$ i obliczenie wartości funkcji dla tych argumentów.

1 pkt - uzasadnienie, że funkcja f jest funkcją ciągłą.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest funkcją wielomianową.

Ponieważ $f(0) = -3$ oraz $f(1) = \frac{1}{8} - 2 + \frac{67}{8} - 3 = \frac{7}{2}$ i funkcja jest ciągła na

przedziale $[0;\ 1]$, więc, na mocy twierdzenia Darboux, przyjmuje w przedziale $[0;\ 1]$ wszystkie wartości pośrednie pomiędzy f(0) a f(1): $\left[-3;\ \frac{7}{2}\right]$. Wobec tego istnieje taki argument $x \in [0;\ 1]$, dla którego zachodzi $f(x) = 0$. To oznacza, że funkcja ma w przedziale $[0;\ 1]$ rozwiązanie.

Ponieważ $f(1) = \frac{7}{2}$ oraz $f(2) = 1 - 8 + \frac{67}{4} - 3 = \frac{27}{4}$ i funkcja jest ciągła na przedziale $[1;\ 2]$, więc, na mocy twierdzenia Darboux, przyjmuje w przedziale $[1;\ 2]$ wszystkie wartości pośrednie pomiędzy $f(1)$ a $f(2)$: $\left[\frac{7}{2};\ \frac{27}{4}\right]$. Wobec tego istnieje taki argument $x \in [1;\ 2]$, dla którego zachodzi $f(x) = 5$. To oznacza, że liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji.

To kończy dowód.

Zadanie 8. (0-4)

Rozważamy wszystkie siedmiocyfrowe liczby naturalne nieparzyste, w których zapisie dziesiętnym dokładnie trzy cyfry są „trójkami” oraz nie powtarza się jakakolwiek cyfra z pozostałych.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb.

Zasady oceniania

4 pkt - poprawne obliczenie sumy wszystkich liczb spełniających warunki zadania: 67200.

3 pkt - obliczenie, ile jest liczb spełniających warunki zadania we wszystkich możliwych przypadkach.

2 pkt - obliczenie, ile jest liczb spełniających warunki zadania w 3 z 4 możliwych przypadków.

1 pkt - wypisanie wszystkich możliwych przypadków: pierwszą i ostatnią cyfrą jest „trójka”; pierwszą cyfrą jest „trójka”, a ostatnią - inna cyfra nieparzysta; pierwszą cyfrą jest inna cyfra oprócz „trójki”, a ostatnią - „trójka”; „trójka” nie jest pierwszą, ani ostatnią cyfrą (ostatnią cyfrą jest inna cyfra nieparzysta).

LUB

obliczenie, ile jest liczb spełniających warunki zadania w 2 z 4 możliwych przypadków.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozważamy wszystkie siedmiocyfrowe liczby naturalne nieparzyste, w których zapisie dziesiętnym dokładnie trzy cyfry są „trójkami” oraz nie powtarza się jakakolwiek cyfra z pozostałych.

Wypiszmy wszystkie możliwe przypadki:

- pierwszą i ostatnią cyfrą jest „trójka” (P1),
- pierwszą cyfrą jest „trójka”, a ostatnią - inna cyfra nieparzysta (P2),
- pierwszą cyfrą jest inna cyfra oprócz „trójki”, a ostatnią - „trójka” (P3),
- „trójka” nie jest pierwszą, ani ostatnią cyfrą (ostatnią cyfrą jest inna cyfra nieparzysta) (P4).

Obliczamy, ile liczb spełnia warunki zadania:

$$\text{P1: } 1 \cdot \binom{5}{1} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 15120$$

$$\text{P2: } 1 \cdot \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 13440$$

$$\text{P3: } 8 \cdot \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 8 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 26880$$

$$\text{P4: } 7 \cdot \binom{5}{3} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 7 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 11760$$

Obliczamy sumę liczb spełniających warunki zadania:

$$\text{P1} + \text{P2} + \text{P3} + \text{P4} = 15120 + 13440 + 26880 + 11760 = 67200$$

Zadanie 9. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$\boldsymbol{sin(6x) + sin(8x) = cos(x)}$$

w zbiorze $[0, \pi]$.

Zasady oceniania

4 pkt - poprawne wyznaczenie rozwiązań równania w zbiorze $[0, \pi]$: $x \in \left\{\frac{\pi}{42}; \frac{5\pi}{42}; \frac{13\pi}{42}; \frac{17\pi}{42}; \frac{\pi}{2}; \frac{25\pi}{42}; \frac{29\pi}{42}; \frac{37\pi}{42}; \frac{41\pi}{42}\right\}$.

3 pkt - rozwiązanie dwóch równań: $cos(x) = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ i $\sin(7x) = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{42} + \frac{2}{7}k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{42} + \frac{2}{7}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt - rozwiązanie jednego z dwóch równań: $cos(x) = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ lub $\sin(7x) = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{42} + \frac{2}{7}k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{42} + \frac{2}{7}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

1 pkt - przekształcenie równania do postaci iloczynowej: $cos(x)\,(2\,sin(7x) - 1) = 0$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

- Jeżeli zdający przy rozwiązaniach równania nie zapisał, że $k \in \mathbb{Z}$, może otrzymać za rozwiązanie maksymalnie **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie trygonometryczne, stosując wzór na sumę sinusów kątów oraz wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias:

$$sin(6x) + sin(8x) = cos(x)$$

$$2\,sin\left(\frac{6x+8x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{6x-8x}{2}\right) = cos(x)$$

$$2\,sin(7x)\cdot cos(-x) = cos(x)\ /\ -cos(x)$$

$$2\,sin(7x)\cdot cos(x) - cos(x) = 0$$

$$cos(x)\,(2\,sin(7x) - 1) = 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$cos(x) = 0 \quad \vee \quad 2\,sin(7x) - 1 = 0\ /\ +1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z \quad \vee \quad 2\,sin(7x) = 1 / \div 2$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z \ \vee\ sin(7x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad 7x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ /\div 7 \quad \vee \quad 7x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ /\div 7;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{42} + \frac{2}{7}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{42} + \frac{2}{7}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Wyznaczamy rozwiązania równania w zbiorze $[0, \pi]$:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{42}; \frac{5\pi}{42}; \frac{13\pi}{42}; \frac{17\pi}{42}; \frac{\pi}{2}; \frac{25\pi}{42}; \frac{29\pi}{42}; \frac{37\pi}{42}; \frac{41\pi}{42}\right\}$$

Zadanie 10. (0-4)

Wyznacz, dla jakich argumentów nierówność

$$\mathbf{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} \geq 5}$$

jest prawdziwa, jeśli wiadomo, że lewa strona tej nierówności jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zasady oceniania

4 pkt - poprawne zapisanie zbioru argumentów z uwzględnieniem dziedziny nierówności: $x \in \left(-1;\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{5};\ 1\right)$.

3 pkt - wyznaczenie dziedziny nierówności z warunku $|q| < 1$: $x \in (-1; 1)$.

2 pkt - zapisanie nierówności z wykorzystaniem wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego: $\frac{1}{1-x^2} \geq 5$.

1 pkt - obliczenie pierwszego wyrazu oraz ilorazu ciągu: $a_1 = 1, q = x^2$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

- Jeżeli zdający rozwiązał zadanie bez wyznaczenia dziedziny nierówności z warunku $|q| < 1$, może otrzymać za rozwiązanie maksymalnie **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Dana jest lewa strona nierówności $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n}$, która jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego, gdzie pierwszy wyraz wynosi $a_1 = 1$, a iloraz - $q = \frac{x^2}{1} = x^2$.

Lewą stronę nierówności możemy zapisać w następujący sposób:

$$\frac{1}{1-x^2} \geq 5$$

dla każdego x, dla którego $|q| < 1$:

$$|q| < 1$$
$$|x^2| < 1$$
$$x^2 < 1 \;/ -1$$
$$x^2 - 1 < 0$$
$$(x-1)(x+1) < 0$$
$$D: x \in (-1; 1)$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{1}{1-x^2} \geq 5 \;/ \cdot (1-x^2), \text{ponieważ } (1-x^2) > 0 \text{ dla } x \in (-1; 1)$$
$$1 \geq 5(1-x^2)$$
$$1 \geq 5 - 5x^2 \;/ -(5-5x^2)$$
$$5x^2 - 4 \geq 0 \;/ \div 5$$
$$x^2 - \frac{4}{5} \geq 0$$
$$\left(x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}; +\infty\right)$$

Z uwzględnieniem dziedziny otrzymujemy zbiór:

$$x \in \left(-1; -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1\right)$$

Zadanie 11. (0-6)

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 9 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa trapezu $|AB| = 18$ jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P.

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt CDP.

Zasady oceniania

6 pkt - poprawne obliczenie długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt CDP:
$r = 9 - \frac{9}{2}\sqrt{3}$

5 pkt - wykorzystanie wzorów na pole trójkąta do obliczenia długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt CDP: $\frac{9+6\sqrt{3}}{2} \cdot r = \sqrt{\frac{9+6\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{9+6\sqrt{3}}{2} - 9\right) \cdot \left(\frac{9+6\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}\right)^2}$

4 pkt - obliczenie $|DP| = |CP| = 3\sqrt{3}$.

3 pkt - wykazanie podobieństwa ΔCDP i ΔABP.

2 pkt - obliczenie $|DE| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $|AE| = \frac{9}{2}$ oraz $|DC| = 9$.

1 pkt - zauważenie, że ΔADS jest równoboczny.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

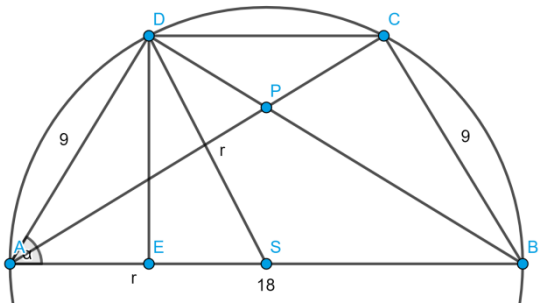
Dłuższa podstawa trapezu $|AB| = 18$ jest średnicą tego okręgu,

zatem $r = |AS| = |SB| = \frac{1}{2}|AB| = 9$.

Zauważamy, że $|DS| = |AS| = r = 9$, więc ΔADS jest równoboczny,

czyli $h_{ABCD} = |DE| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

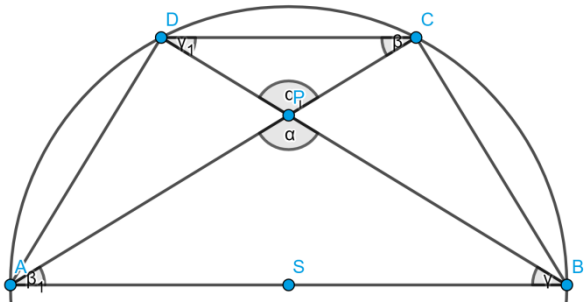
oraz $|AE| = \frac{9}{2}$.



Obliczamy $|DC|$:

$$|DC| = |AB| - 2|AE| = 18 - 9 = 9$$

Bok $AB \parallel CD$,



więc $|\sphericalangle DPC| = |\sphericalangle APB|$ (kąty wierzchołkowe)

$|\sphericalangle CDP| = |\sphericalangle PBA|$ (kąty naprzemianległe)

$|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle PAB|$ (kąty naprzemianległe)

Zatem $\Delta CDP \sim \Delta APB$ (cecha kkk), a skala podobieństwa wynosi $k = \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ (stosunek 1:2).

Ponieważ trapez $ABCD$ jest równoramienny, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DCB|$, a $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle ABP|$, więc $|\sphericalangle CDP| = |\sphericalangle DCP|$, czyli ΔCDP jest równoramienny.

Obliczamy $|DP| = |CP|$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$h_{P_{DC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$|CP|^2 = {h_{P_{DC}}}^2 + \left(\frac{1}{2}|CD|\right)^2$$

$$|CP|^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 9\right)^2$$

$$|CP|^2 = \frac{27}{4} + \frac{81}{4}$$

$$|CP|^2 = \frac{108}{4}$$

$$|CP| = \sqrt{\frac{108}{4}} = 3\sqrt{3}$$

Obliczamy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt CDP, stosując wzory na pole trójkąta i ich równość:

$$p = \frac{9 + 2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} \cdot r =$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} - 9\right) \cdot \left(\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} \cdot r = \sqrt{\frac{9 + 6\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{6\sqrt{3} - 9}{2}\right) \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}}$$

$$\frac{9+6\sqrt{3}}{2}\cdot r=\sqrt{\frac{6\sqrt{3}+9}{2}\cdot\left(\frac{6\sqrt{3}-9}{2}\right)\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}}$$

$$\frac{9+6\sqrt{3}}{2}\cdot r=\sqrt{\frac{27}{4}\cdot\frac{81}{4}}$$

$$\frac{9+6\sqrt{3}}{2}\cdot r=\sqrt{\frac{2187}{16}}$$

$$\frac{9+6\sqrt{3}}{2}\cdot r=\frac{27\sqrt{3}}{4}\ /\cdot 4$$

$$(18+12\sqrt{3})\cdot r=27\sqrt{3}\ /\div(18+12\sqrt{3})$$

$$r=\frac{27\sqrt{3}}{18+12\sqrt{3}}=\frac{486\sqrt{3}-972}{-108}=\frac{972-486\sqrt{3}}{108}=9-\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

Zadanie 12. (0-6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których rozwiązaniem nierówności

$$\frac{m^2-m-2}{m^2-m-6}x^2-2(m-2)x+m^2-m-6>0$$

jest

$$x\in\mathbb{R}.$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozpatrzeniu przypadku kwadratowego ($a>0$). Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

3 pkt - poprawne wyznaczenie części wspólnej dla warunków $a>0$ oraz $\Delta<0$: $m\in(3;+\infty)$.

2 pkt - rozwiązanie nierówności $\Delta<0$: $m\in(2;+\infty)$.

1 pkt - rozwiązanie nierówności $a>0$: $m\in(-\infty;-2)\cup(-1;2)\cup(3;+\infty)$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

- Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $a</\leq/\geq 0$ i/lub $\Delta>/\geq/=/\leq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje maksymalnie **1 punkt**.

Drugi etap polega na rozpatrzeniu przypadku liniowego $(a = 0)$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

2 pkt - poprawne wyznaczenie części wspólnej dla warunków: $a = 0$, $b = 0$ oraz c > 0: $\emptyset$.

1 pkt - rozwiązanie warunków $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0: \\ c > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m \in \{-1;\ 2\} \\ m = 2 \\ m \in (-\infty;\ -2) \cup (3; +\infty) \end{cases}$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczenie części wspólnej dla przypadku kwadratowego $(a > 0)$ oraz liniowego $(a = 0)$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt - poprawne wyznaczenie części wspólnej dla przypadku kwadratowego $(a > 0)$ oraz liniowego $(a = 0)$: $m \in (3; +\infty)$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy sumę zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja $\frac{m^2-m-2}{m^2-m-6}x^2 - 2(m-2)x + m^2 - m - 6$ osiąga wartość większą od 0 dla dowolnego $x \in$ R, jeśli jest:

- funkcją kwadratową o dodatnim współczynniku kierunkowym (parabolą z ramionami zwróconymi do góry) znajdującą się nad osią OX,
- lub funkcją liniową (prostą) o stałym współczynniku kierunkowym znajdującą się nad osią OX.

Rozważmy oba przypadki.

Stawiamy warunki osiągnięcia wartości większej od 0 dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ dla przypadku kwadratowego:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m^2-m-2}{m^2-m-6} > 0 \ / \cdot (m^2-m-6)^2 \\ [-2(m-2)]^2 - 4 \cdot \dfrac{m^2-m-2}{m^2-m-6} \cdot m^2-m-6 < 0 \end{cases}, \text{zał.}: m^2-m-6 \neq 0$$

$$\begin{cases} (m^2-m-2)(m^2-m-6) > 0 \\ 4(m-2)^2 - 4(m^2-m-2) < 0 \end{cases}, \quad \text{zał.}: (m+2)(m-3) \neq 0$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-2)(m+2)(m-3) > 0 \\ 4(m-2)^2 - 4(m^2-m-2) < 0 \ / \div 4 \end{cases}, \quad \text{zał.}: m \neq \{-2;\ 3\}$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-2)(m+2)(m-3) > 0 \\ (m-2)^2 - (m+1)(m-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-2)(m+2)(m-3) > 0 \\ (m-2)[(m-2) - (m+1)] < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-2)(m+2)(m-3) > 0 \\ -3(m-2) < 0 \ / \div (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-2)(m+2)(m-3) > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2) \cup (3; +\infty) \\ m \in (2; +\infty) \end{cases} \quad \text{część wspólna: } m \in (3; +\infty)$$

Stawiamy warunki osiągnięcia wartości większej od 0 dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ dla przypadku liniowego:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m^2-m-2}{m^2-m-6} = 0 \ / \cdot (m^2-m-6), \quad \text{zał.}: m \neq \{-2;\ 3\} \\ -2(m-2) = 0 \ / \cdot (-2) \\ m^2-m-6 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)(m-2) = 0 \\ m-2 = 0 \\ (m+2)(m-3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in \{-1;\ 2\} \\ m = 2 \\ m \in (-\infty;\ -2) \cup (3; +\infty) \end{cases} \quad \text{część wspólna: } m \in \emptyset$$

Wyznaczamy sumę rozwiązań z obu przypadków: $m \in (3; +\infty)$.

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe sześciokątne o objętości 2025, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż 8.

Zadanie 13.1. (0-2)

Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(a) = \frac{3a^3\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{a}}$$

Zasady oceniania

2 pkt - poprawne wyznaczenie wzoru na pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa: $P(a) = \frac{3a^3\sqrt{3}+2700\sqrt{3}}{a}$.

1 pkt - wyznaczenie zmiennej H ze wzoru na objętość graniastosłupa: $H = \frac{450\sqrt{3}}{a^2}$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa w celu wyznaczenia zmiennej H:

$$6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 2025 \ / \cdot 4 \div 6$$

$$a^2H\sqrt{3} = 1350 \ / \div a^2\sqrt{3}$$

$$H = \frac{1350}{a^2\sqrt{3}}$$

$$H = \frac{450\sqrt{3}}{a^2}$$

Wyznaczamy wzór na pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa:

$$P(a) = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot H = 3a^2\sqrt{3} + 6 \cdot a \cdot \frac{450\sqrt{3}}{a^2} = 3a^2\sqrt{3} + \frac{2700\sqrt{3}}{a} =$$

$$= \frac{3a^3\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{a}$$

To kończy dowód.

Zadanie 13.2. (0-4)

Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{3a^3\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0; 8]$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Zasady oceniania

4 pkt - obliczenie najmniejszego pola powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P(\sqrt[3]{450}) = 135\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{60}$.

3 pkt - wykazanie, że dla ekstremum $a = \sqrt[3]{450}$ funkcja $P(a)$ osiąga najmniejszą wartość w dziedzinie $a \in (0; 8]$ - wyznaczenie długości krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze: $a = \sqrt[3]{450}$.

2 pkt - obliczenie ekstremum funkcji $P'(a)$: $a = \sqrt[3]{450}$.

1 pkt - wyznaczenie pochodnej funkcji $P(a)$: $P'(a) = \frac{6a^3\sqrt{3} - 2700\sqrt{3}}{a^2}$.

0 pkt - rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji $P(a)$:

$$P'(a) = \frac{9a^2\sqrt{3} \cdot \mathrm{a} - 3a^3\sqrt{3} - 2700\sqrt{3}}{a^2} = \frac{9a^3\sqrt{3} - 3a^3\sqrt{3} - 2700\sqrt{3}}{a^2} =$$

$$= \frac{6a^3\sqrt{3} - 2700\sqrt{3}}{a^2}, \text{ zał.: } a \neq 0$$

Obliczamy ekstrema funkcji $P(a)$:

$$6a^3\sqrt{3} - 2700\sqrt{3} = 0 \;/ \div \sqrt{3}$$

$$6a^3 - 2700 = 0 / +2700$$

$$6a^3 = 2700 \;/ \div 6$$

$$a^3 = 450 \;/ \sqrt[3]{\square}$$

$$a = \sqrt[3]{450} \approx 7{,}66$$

Badamy monotoniczność funkcji $P(a)$:

a	$a \in (0;\ \sqrt[3]{450})$	$a = \sqrt[3]{450}$	$a \in (\sqrt[3]{450};\ 8]$
monotoniczność	funkcja malejąca	zmiana monotoniczności funkcji (minimum lokalne = minimum globalne dla $a \in (0; 8]$)	funkcja rosnąca

Funkcja $P(a)$ osiąga najmniejszą wartość w zadanej dziedzinie dla $a = \sqrt[3]{450}$.

Obliczamy najmniejsze pole powierzchni całkowitej:

$$P(\sqrt[3]{450}) = \frac{3 \cdot (\sqrt[3]{450})^3\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{\sqrt[3]{450}} = \frac{1350\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{\sqrt[3]{450}} = \frac{4050\sqrt{3}}{\sqrt[3]{450}} = \frac{4050\sqrt{3}}{\sqrt[3]{450}} =$$

$$= 9\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{202500} = 135\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{60}$$