Egzamin maturalny *Formuła 2025*

# MATEMATYKA

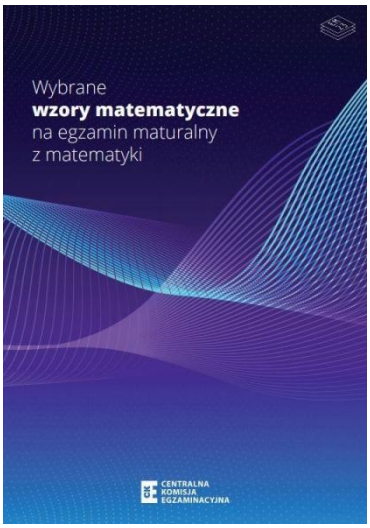
## Poziom rozszerzony

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna obok.




**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.**

## Zadanie 1. (0-2)

**Oblicz granicę**

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{x^3 - 125}{(x-5)^2}$$

**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 2. (0-2)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ dane są dwie proste $l_1$ oraz $l_2$. Kąt między tymi prostymi ma miarę $60^\circ$. Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej $l_1$ wynosi $\frac{1}{5}$.

**Oblicz współczynnik kierunkowy w równaniu prostej $l_2$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 3. (0-3)

Dane są liczby $a = \frac{9\log_5 12 \cdot \log_2 5}{\log_2 12}$ i $b = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25 + \log_5 5$.

**Oblicz $a^2b^2$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 4. (0-3)

Funkcja $f$ jest określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{8 - 27x}$$

dla $x \in \left(-\infty; \frac{8}{27}\right]$.

**Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f$ w punkcie $x_0 = -5$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 5. (0-3)

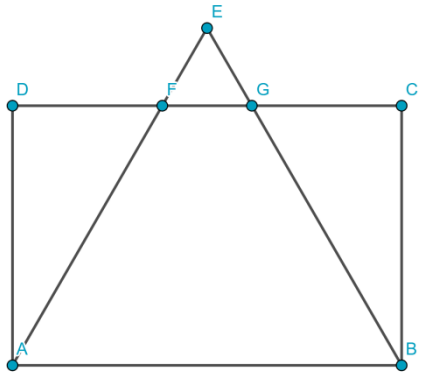
Do egzaminu maturalnego z matematyki rozszerzonej przystąpiło ze wszystkich abiturientów 40% uczniów technikum. Prawdopodobieństwo tego, że uczeń technikum uzyskał wynik wyższy lub równy 30% wynosi 0,1 . Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że uczeń liceum uzyskał wynik niższy niż 30% wynosi 0,3.

Z bazy wyników wylosowano pewnego ucznia, który z matury rozszerzonej uzyskał więcej niż 30%.

**Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ten uczeń rzeczywiście uczęszczał do technikum. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 6. (0-3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$ i $|AD| = b$. Na boku $AB$ zbudowano trójkąt równoboczny $ABM$ (zobacz rysunek).




**Wykaż, że stosunek pola trójkąta *EFG* do pola trójkąta *ABE* wynosi $1 - \frac{4\sqrt{3}b}{3a} + \frac{4b^2}{3a^2}$.**

**W rozwiązaniu zadania zastosuj twierdzenie sinusów.**

## Zadanie 7. (0-4)

Funkcja $f$ jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + \frac{67}{8}x - 3$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**Wykaż, że funkcja ma w przedziale $[0; 1]$ jedno rozwiązanie, a liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.**

## Zadanie 8. (0-4)

Rozważamy wszystkie siedmiocyfrowe liczby naturalne nieparzyste, w których zapisie dziesiętnym dokładnie trzy cyfry są „trójkami” oraz nie powtarza się jakakolwiek cyfra z pozostałych.

**Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 9. (0-4)

**Rozwiąż równanie**

$$\boldsymbol{sin(6x) + sin(8x) = cos(x)}$$

**w zbiorze $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 10. (0-4)

**Wyznacz, dla jakich argumentów nierówność**

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} \geq 5$$

**jest prawdziwa, jeśli wiadomo, że lewa strona tej nierówności jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 11. (0-6)

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 9 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa trapezu $|AB| = 18$ jest średnicą tego okręgu. Przekątne $AC$ i $BD$ trapezu przecinają się w punkcie $P$.

**Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt $CDP$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 12. (0-6)

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których rozwiązaniem nierówności**

$$\frac{m^2-m-2}{m^2-m-6}x^2-2(m-2)x+m^2-m-6>0$$

**jest**

$$x\in\mathbb{R}.$$

**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe sześciokątne o objętości 2025, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż 8.

## Zadanie 13.1. (0-2)

**Wykaż, że pole $P$ powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości $a$ krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem**

$$P(a) = \frac{3a^3\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{a}$$

## Zadanie 13.2. (0-4)

Pole $P$ powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości $a$ krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{3a^3\sqrt{3} + 2700\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0; 8]$.

**Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.**

**BRUDNOPIS** (nie podlega ocenie)